

Title	レーザー共振器の自由振動姿態の研究( Dissertation_全文 )
Author(s)	小倉, 久直
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1967-05-23
URL	<a href="http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r996">http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r996</a>
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	author

# レーザー共振器の自由振動姿態の研究

1966年10月

小倉久直



# レーザー共振器の自由振動姿態の研究

1966年10月

小倉久直





# 目 次

第1章	序 論	1
§ 1	序 論	1
§ 2	Fabry Perot 共振器研究小史	4
第2章	空 洞 理 論	10
§ 1	序 論	10
§ 2	スカラー波の共振理論	12
§ 3	開口面よりの輻射と摂動	13
§ 4	円筒表示のGreen函数	15
§ 4.1	自由空間のGreen函数	15
§ 4.2	平行平面導波管のGreen函数	19
§ 5	表面積分	19
§ 6	数値計算	21
§ 7	考 察	26
第3章	変形したFabry Perot 共振器	31
§ 1	反射鏡の微小変形	31
§ 2	運動方程式と摂動	33
§ 3	$I$ の行列要素	36
§ 4	$H$ の行列要素	37
§ 4.1	微小変形の摂動	37
§ 4.2	傾斜変形	38
§ 4.3	球面変形	40
§ 5	鏡面変形による損失の変化	41
§ 5.1	傾斜変形	41
§ 5.2	球面変形	43

§ 6	回折損失の数値計算	44
§ 6.1	傾斜変形	44
§ 6.2	球面変形	52
§ 7	考 察	52
§ 8	境界条件の摂動の取扱いの別法	60
第4章	励 振 理 論	66
§ 1	励振理論	66
§ 2	基礎方程式	69
§ 3	行列要素の計算	77
§ 3.1	行列要素	77
§ 3.2	Fresnel 積分－Ⅰ	79
§ 3.3	Fresnel 積分－Ⅱ	81
§ 3.4	Fresnel 積分で表わした行列要素	83
第5章	自由減衰振動モード－Ⅰ	85
§ 1	自由振動	85
§ 2	無励振方程式の近似解法	86
§ 3	回折損失，共振周波数	89
§ 4	場の分布	94
§ 5	空洞理論の結果の批判	99
§ 6	考 察	102
第6章	自由減衰振動モード－Ⅱ	106
§ 1	鏡面変形	106
§ 2	基礎方程式	107
§ 3	二つの表面積分	113
§ 4	特性行列式と特性根	117
§ 4.1	特性行列式	117
§ 4.2	特性行列方程式の根	121

§ 5	回折損失	123
§ 6	考 察	130
第 7 章	結 言	136
	謝 辞	138
附録 2.1	二三の公式	139
附録 2.2	積分公式 (2.3 4) の証明	139
附録 3.1	鏡面変形摂動行列	141
附録 3.2	傾斜変形摂動行列の角部分の積分	142
附録 3.3	積分公式	143
附録 3.4	$\partial d$ の $\varphi$ -依存性	145
附録 3.5	級数和の数値表	147
附録 4.1	Fresnel 積分の漸近形	148
附録 5.1	特性行列方程式 (5.9) の根の近似解	150
附録 6.1	積分公式	151
附録 6.2	特性行列方程式 (6.4 8) の根の近似解	153
附録 6.3	$J_{lk}$ の積分値	155
	参考文献	156
	主要記号表	161



# 第 1 章 序 論

## § 1 序 言

本研究は昭和 38 年以来京都大学工学部電子工学教室において池上淳一教授の指導の下に行なつたレーザー共振器としての Fabry Perot 共振器の研究のうち、平行円形平面 Fabry Perot 共振器の自由減衰振動モードに関する部分をまとめたものである<sup>1)~14)</sup>。

すべての発振器が帰還回路と共振回路とを必要とするように、光波発振器としてのレーザーにおいては Fabry Perot 共振器がその役割を果たしている。マイクロ波電子管あるいはメーザーにおいてはいわゆるマイクロ波空洞共振器が使用されているが、かかる構造の共振器は光学領域の短波長用の共振器としては構造上ならびに性能上実用不可能である。したがつてレーザーにおいては精度の高い仕上り面をもつ 2 枚の鏡面を対向させた Fabry Perot 共振器が使用される。元来 Fabry Perot 共振器は光学分野において平行平面の多重反射を利用した高分解能の Fabry Perot 干渉計として用いられていたものであるが、レーザーの可能性を最初に提案した Schawlow, Townes<sup>15)</sup>, Prokhorov<sup>16)</sup> 等の古典的論文において共振器としてこの Fabry Perot 干渉計が指摘された。しかしながら干渉計内にレーザー物質を満たして光波発振器として用いるには、光波の干渉計内の 1 伝播当りの利得をあげる必要上、鏡面間を非常に離して鏡を対向させねばならない。その結果レーザー用の共振系は光学における Fabry Perot 干渉計とはかなり異なつた外観を呈することとなり、共振器としての干渉計の特性を幾何光学的に論ずることは正確ではなくなつた。その様なレーザー用の Fabry Perot 共振器の特性を波動論の立場から理論的に解析することは Fox, Li<sup>17)</sup> によつて初めて行なわれた。其後レーザーの研究の進展と平行してレーザー用共振器としての Fabry Perot 共振器の解析は各国で盛んに行われるようになり、現在においてはそれらの研究は非常に多岐にわたつている。この研究の多様性は実用面における多様性によるだけではなく、この共振器の問題の取扱いが困難であることと問題自身が興味ある内容を蔵していることにもよると思われる。電子工学における波動現象の問題としては、自由空間におけるいわゆる伝播問題、回折問題、および立体回路における導波管、共振器の問題等があるが、それらはほぼ解決され標準的な理論は教科書などにも見出される<sup>18)</sup>。其後の研究の対象は、自由空間と立体回路との中間に位置するものあるいは組合わされた問題である。導波管と自由空間の回折との組合わされた問題は Wiener-Hopf 法が成功して以来<sup>19)</sup> 数多の研究が

蓄積されて来たが、Fabry Perot 共振器はもう一つの問題即ち自由空間の伝播回折と共振器との組合わせ問題に属すると云う意味で興味ある対象と考えられる。この様な問題はレーザー共振器以外では既に音響<sup>20)</sup>、アンテナ<sup>21)</sup>等の問題でも取扱われた例があるが、研究が盛んになったのはレーザー共振器の解析の要請が生じた後である。この問題においては開口共振器即ち自由空間と繋がった開いた共振器の不安定な共振を如何に取扱うかということが解析の主題であるが、Wiener-Hopf 法のような厳密法が偶々成立しないかぎり常に近似法によらなければならない点が困難である。近似法とは物理的には波動の描像に関連している。描像とは正確な像と云うよりは問題の近似の出発点に選ぶ物理像を意味している。レーザー共振器の研究の多様性は、共振器の形状にもとづく多様性とこの共振像の捕え方による定式化の多様性との結合によって生じていると云うことも出来る。

本研究も上記のレーザー共振器の研究の動向の中にあつて行なわれ現在に至っている。本論文の内容は研究の行なわれた順に各章にわたって配列されているが、それらの研究目的ならびに意義はその研究の行なわれた時期におけるレーザー共振器の研究の世界的な進展状況と深く関連している。したがって次節においてはFabry Perot 共振器の研究の発展の模様を歴史的に概観し簡単に分析を試み、あわせて本論文における各研究の時期、目的ならびに意義を明らかにする。現在ではFabry Perot 共振器に関する研究の数は大、小あわせて非常に増加したが、次節ではそのうち主要なものを取りあげ、理論的解析以外実験的および応用的な研究についても触れる。従来の研究の詳しい分析ならびに批判は以下の各研究の出発点でもあるので各章の序節において改めて述べる。

本論文は序章の他に6章から成っている。第2章第3章は研究の初期の段階において行なわれた空胴理論による取扱いを述べている。第2章ではFabry Perot 共振器の自由振動モードの理論を空胴理論とアンテナ理論との結合として定式化し、理論的解析を行なつて従来の取扱いの結果を一般的に導びく。第3章ではこの空胴理論にもとづいてFabry Perot 共振器の鏡面変形の問題を取扱う。これはレーザー共振器にあつては波長が極端に短かいために生ずる避けられない問題として理論的解析の要請があつたからである。それまではシミュレーションによる簡単な場合の結果が知られているのみであつたが、空胴理論によつてこの取扱いが可能となり、傾斜変形、球面変形に対して種々の結果が一般的に導びかれる。第4章第5章第6章においてはFabry Perot 共振器のより一般的な問題を解析するために励振理論の定式化を行ない、それを空胴理論で取扱つた自由振動モードの問題に再び適用して詳細な解析を行なう。従来の理論的解析ではすべて不安定な自由振動モードのみが研究の対象であつたが

次の段階としては現実的な場合である励振問題を取扱う必要がある。第4章では導波管共振像にもとずいて励振問題を正確に波動方程式の境界値問題として定式化し、より一般的な種々の問題即ち、内部および外部励振、線路との結合等の問題を具体的に取扱うことの出来る基礎方程式を導びく。本論文においては共振器の自由振動のみを主題としているので励振問題の結果には立入らないが、その理論を用いてより詳細に自由振動モード、鏡面変形の問題を解析する。まず第5章では特別の場合として無励振問題を取扱い、自由振動モードの回折損失、周波数変化、場の振巾分布、位相分布を求め、従来の解析方法による結果との比較ならびに批判を行なう。第6章では励振理論の一つの応用例として鏡面変形の問題を再び取り上げ、空洞理論による結果の再確認、ならびに修正を行なう。以上の各章では論旨を明確にするため、計算、証明などの細部は本文の最後に附録の形にまとめ、本論では結果のみを引用する叙述形式をとっている。最後の第7章では結言として本論文の研究方法ならびに成果を要約する。



## § 2 Fabry Perot 共振器研究小史

レーザー用 Fabry Perot 共振器は、元来は光学において Fabry Perot 干渉計<sup>22)</sup>とよばれていたものであつて、垂直入射光の平行平面間における多重反射によつて鮮鋭な干渉縞をつくる光学素子として考案されたものである (1899)。これは高分解能の分光干渉計としてスペクトル線の微細構造の観測、波長の比較測定、干渉フィルタ等に使用されている<sup>23)</sup>。特に平行平面間の間隔を固定したものは Fabry Perot エタロンとよばれる。光学分野以外ではこの干渉計型の共振器はセンチ波において円筒導体の Sommerfeld 表面波共振測定用の高い  $Q$  をもつ共振器としてレーザー発明以前に使用されており (1955)、現在でもミリ波、センチ波用の共振器としての研究がつけられているが、これらの研究は Fabry Perot 共振器の実験ならびに応用と云う観点から後にまとめて述べる。

レーザーの可能性を最初に示した Schawlow, Townes (1958)<sup>15)</sup> がその共振器として Fabry Perot 干渉計を提案し、Maiman<sup>24)</sup>, Collins 等<sup>25)</sup> (1960) がレーザー発振に成功した後、レーザー共振器としての Fabry Perot 干渉計の特性を詳細に解析する要請が生じた。光学における Fabry Perot 干渉計の解析は平行平面が十分に接近しているので多重反射を幾何光学的に取扱うことで十分であつたが、レーザーにおいては発振の利得をあげる必要から、レーザー物質をはさんで平行平面鏡あるいは球面鏡を非常に離して対向させねばならず、したがつて光学における Fabry Perot 干渉計とは外観の上では大変異なつたものとなる。これは構造上大きく壁面の開いた一つの開口共振器 (open resonator) であつて、波長の開口よりの回折効果が共振に対し少なからぬ影響を及ぼす。この様なレーザー共振器としての Fabry Perot 干渉計の最初の理論的な定式化を与えたのが Fox, Li<sup>17)</sup> (1961) である。これは一方の鏡面上の波動が対向する第二の鏡面に向つて伝播する模様をマイクロ波のアンテナ理論の様に Huygens の原理によつて記述し、第一の鏡面上の波動場が第二の鏡面上に再生されるという形で共振を定式化し、伝播函数を積分核とする積分方程式の固有値問題とみなすものである。固有値が伝播による振巾の減少を記述すると考え、固有値によつて回折損失を定義している。これは正確に干渉計像を基礎にした定式化であるから、以下では干渉計理論と名づけることにする。Fox, Li はこの積分方程式

を、帯状、矩形、円形平面鏡、および円形共焦点球面鏡の場合に対して電子計算機によるシミュレーションを行なつて数値結果を得た。この様にして開口共振器としてのFabry Perot共振器の固有振動モードには平面波共振とは異なつた、マイクロ波閉空洞の場合と類似した種類の横モードが存在することが示され、回折損失、振巾分布、位相分布が比較的低いFresnel数に対し数値的に求められた。同じ頃、Kotik, Newstein<sup>26)</sup>(1961)は鏡面による波の反射特性を散乱行列によつて記述し、部分波に対する共振条件を積分方程式の形として与える定式化を示した。散乱行列を求めるのにKirchhoff近似を用いるが、彼等はFox, Liの様に具体的な結果を導き出すことは成功しなかつた。しかしながらこの定式化は実はFox, Liのそれと同等であることを示すことが出来る<sup>12)</sup>。それはFox, Liの方程式は量子力学で云う $x$ 表示であり、後者のそれは $p$ 表示に対応するものであつて、Fourier変換により一方から他方に移ることが出来るからである。Goubau, Schwering<sup>27)</sup>(1961)によつて始められたビーム波伝送理論も質的には同様な部分波による取扱ひであつて、Kotik等の取扱ひは部分平面波であるのに対し、後者は部分円筒波である点が異なるだけである。この理論の結果は共焦点Fabry Perot共振器の理論と同等であつて、Fox, Liの求めた結果とよく一致している。部分波の方法は其後Culshaw<sup>28)</sup>(1962), Barone<sup>29)</sup>(1963)によつて議論されたが、波動場の空間的な分布を問題にする限りは $x$ 表示の方法の方がより簡単であるので現在では取扱われなくなつた。

Fox, Liの理論はこの種の研究の端緒を開いたものとして重要な位置を占める。この研究の刺激によつて其後レーザー共振器の研究が急激に増加した。Fox, Liの解析はシミュレーションによるものであつて、したがつて数値解析であつたから、解の種々の一般的性質は明らかではなく、次の問題はその積分方程式の解を解析的に求めることでなければならなかつた。まずBoyd, Gordon<sup>30)</sup>(1961)によつて共焦点矩形球面共振器に対しては直交座標による変数分離により解がスフエロイド函数によつて簡単にあらわに与えられることが示された。これは帯域制限Fourier変換に関するSlepian Pollak<sup>31)</sup>(1961)の研究を応用したものである。又、Boyd, Kogelnik<sup>32)</sup>(1962)は等価共焦点球面系を考察することにより、一般曲率球面系の定性的な特性を論じた。しかしながら積分方程式は上の様な特別な場合以外は厳密解は見出されえないので種々の近似解法を用いるか、あるいは異なつた描像に基づいて理論を新しく定式化して解析する必要があつた。干渉計理論の積分方程式に直接に近似解法を適用することは、まず固有値問題を停留値問題として記述し、適当な試行函数を選んで近似的固有値を計算することから始められた。 $p$ 表示では既に試みがあつたが<sup>26)28)</sup>、

具体的に結果を求めることは $x$ 表示の取扱いによつてTang<sup>33)</sup>(1962)が行ないFox, Liとよく一致する結果をえた。しかしながら積分核は対称であるがエルミットではなく通常のRitzの方法が無条件に適用出来ないためにFox, Li, Morgan<sup>34) 35)</sup>(1963)等によつて批判されている。その様な積分核をもつ第2種Fredholm型の積分方程式の固有値が少なくとも一つは存在することの数学的証明は最近Cochran<sup>36)</sup>(1965)が与えた。固有値積分方程式の普通の近似解法は展開法によるものである。共焦点円形球面系の場合には、上にのべた様にGoubau等によるビーム波伝送理論<sup>27) 37)</sup>と同等であるが、これは無限共焦点球面系の固有函数であるGauss-Laguerre函数による展開によつて取扱われている。この取扱いは池上, 小倉, 吉田, 古浜<sup>10)</sup>(1965)が摂動法を用いて簡単化している。平面鏡に対してはBergstein, Schachter(1964)<sup>38)</sup>(1965)<sup>39)</sup>(1966)<sup>40)</sup>等が直交展開法によつて、大きさの異なる矩形共焦点球面鏡に対してはStreifer, Gamo(1964)<sup>41)</sup>(1965)<sup>42)</sup>がSchmidtの展開法によつて、又矩形および円形共焦点球面系に対してはMcCumber<sup>43)</sup>(1965)が多項式展開法によつてそれぞれ取扱っている。又別の方法として、積分方程式を微分方程式に直して解く方法がSlepian<sup>44)</sup>(1964)によつて円形共焦点球面系に対して行なわれた。これは上にのべた帯域制限の1次元Fourier変換の結果をBoyd, Gordonが帯状又は矩形共焦点球面系に対して応用したように、これを帯域制限の2次元Fourier変換に拡張することによつてスフェロイド函数の定義を一般化し、その結果を円形共焦点球面系に应用するものである。以上の様に近似法によつて解析的に取扱うことの出来るのは平面、共焦点球面、共中心球面の場合に限られ、一般の曲率の球面に関しては定性的な議論<sup>32)</sup>以外解析的に取扱うことは困難であつて、未だ解決されていない。一般曲率の球面系に対してはLi<sup>45)</sup>(1965)の行なつたシミュレーションによる数値結果が知られているのみである。

以上はすべて干渉計像に基づく理論の解析である。干渉計理論は問題の定式化を簡単に行なうことが出来る利点を有しているが、一方共振像の捕え方が固定しているために種々の問題への応用が出来難いこと、ならびに方程式の解法が限定されて解き難いことなどの欠点が伴っている。Fabry Perot共振器の問題を解析する別の方法は最初から異なつた描像を出発点として定式化を行なうことである。その一つはVainshtein<sup>46)</sup>(1963)の導波管像による巧妙な取扱ひである。半無限長平行平面導波管内を開口面に向つて進行する2次元導波管伝播モードをWiener-Hopf法を用いて解析すれば、レーザー共振器に対応する高次モードにおいては遮断状態に近いモードの反射係数は非常に大きく開口面での輻射損失、モード変

換が著しく小さくなることが示される。従つてその導波管が両端開口であれば伝播波は2つの開口の間を往復し、輻射によつて減衰する一つの導波管共振が生ずるが、これは帯状平行平面間の一つのFabry Perot共振とみなすことが出来る。又この反射係数を平行円板間の円筒波伝播モードに対しても適用するならば、平行円板間のFabry Perot共振がえられる。この様にして求められた回折損失はFox, Liの数値計算とよく一致している。池上, 小倉, 吉田<sup>1)</sup>(1964)は閉じた空洞共振モードを無振動モードとし、開口面よりの輻射の反作用を振動とみなす取扱ひを行なつて、回折損失、周波数変化等を簡単な表式で与えた。又Risken<sup>47)</sup>(1964)も同様な描像に基づき開口面での連続条件を解くことによつて回折損失、場の分布等を求めた。これらの取扱ひの結果<sup>1) 38) 46) 47)</sup>は損失の小さいところでは比例常数の差をのぞけばモード、共振器の寸法、波長などのパラメタ依存性は、定式化の差に関係なく全く一致している。

干渉計像による定式化は一般には波動方程式から出発して論ずる必要がある。回折の問題においては波長が非常に短いことを利用すれば双曲型の波動方程式を放物型に近似することが出来る<sup>48)</sup>。Vainshtein<sup>49)</sup>(1964)は球面鏡間の共振をスフェロイド座標で記述してこの近似を行ない、干渉計理論の基礎方程式を導びいてこの定式化の不明な点を明らかにし、同様なことを平面<sup>50)</sup>円筒面<sup>51)</sup>についても行なつた。

レーザー共振器としての実用的な立場からは、鏡面の不完全、配置の調整誤差のために生ずる損失、共振モードの変化をしらべる要請があつた。鏡面の変形を散乱行列の変化として捕える $p$ 表示の定式化の方法は早くから示されていたが<sup>26)</sup>具体的に解を求めることは成功していなかつた。実用的な数値結果はFox, Li<sup>52)</sup>(1963)が鏡面変形に対応して無歪鏡面に等価的に位相分布を付加する $x$ 表示の近似を用いて、無限長平面ストリップに対し計算機によるシミュレーションで数値を得たのが最初である。同様にして共焦点系球面の曲率がわずかにずれた場合の損失の変化をも求めている。池上, 小倉, 吉田<sup>5)</sup>(1964)は空洞理論を用いて平行円板共振器の傾斜および球面変形を解析して損失を簡単な一般式で与え、平行平面間の共振は傾斜に対し非常に敏感であることを示した。共焦点球面共振器の変形の問題は、円形球面の傾斜に対しては池上, 小倉, 吉田, 古浜<sup>10)</sup>(1965)が、又帯状球面鏡の傾斜ならびに曲率の変化に対してはGioge<sup>53)</sup>(1964), (1965)が、共に異なつた立場から摂動法を用いて取扱つている。其他の実用的問題としては共中心球面共振器の絞りの問題がLi<sup>54)</sup>(1963)によつて、不均一反射鏡の問題が熊谷, 森, 松原<sup>55)</sup>(1964)によつて、縦モード選択の問題としての複合型Fabry Perot共振器の問題が熊谷, 松原, 森<sup>56)</sup>(1964)によつて、鏡面

穿孔の問題がMcCumber<sup>43)</sup>(1965)によつて、異方性物質の入った共振器はDovle, White<sup>57)</sup>(1965)によつて、それぞれ取扱われている。この種のFabry Perot 共振器の変種に対する問題の研究は最近増加しており種々の形状の共振器が扱われるようになった。

以上はすべてFabry Perot 共振器の不安定な自由減衰振動モードのみを対象としたものである。次に来るべき問題は当然共振器の線路との結合問題、励振問題でなされなければならない。通常自由振動モードの研究はより一般的なその様な問題の前段階としてなされるのであるが、開口共振器に対してどの様に励振問題の定式化が可能であるかを示すことは困難な問題である。その様な一つの定式化がVainshtein<sup>58)</sup>(1965)によつて示されている。それは散乱問題におけるS行列理論といわれるものの一つの型であつて、不安定共振というものをS行列によつて数学的にとらえようとするものである。この論文は開口共振器の励振を問題にした唯一つの論文であつたが、境界条件の単純でないFabry Perot 共振器に対しては具体的に適用することは事実上不可能である。池上, 小倉, 吉田, 巖本<sup>14)</sup>(1966)は平行円板型Fabry Perot 共振器の励振問題をGreen函数法によつて定式化し、強制励振の特性の具体的な解析を実行した。又更に無励振の場合として自由振動を解析し、Fox, Liの結果<sup>17)</sup>ならびに空洞理論による鏡面変形の結果<sup>5)</sup>を再び得ている。現在までのところ励振問題の解析は他には報告されていない。又一般曲率の球面Fabry Perot 共振器の自由振動ならびにその励振の解析が困難な未解決の問題であり、これが解決されるならば、レーザー共振器としてのFabry Perot 共振器の理論上の主要な問題は一応終了するものと考えられる。

以上においてはFabry Perot 共振器の理論的研究の現在に至るまでの進展状況を概観したが、次に実験的研究について言及する。この種の研究の数は理論的解析の研究数と比較すればかなり少ないが、着々と成果が報告されている。光学的波長の共振器としてこの共振器の特性を理想的な状態で実験を行なうことは困難である。それは波長が非常に短かいために共振器の製作精度、測定用光源、測定器の性能がマイクロ波領域のそれらに比して全く劣るためである。したがつて人為的に支配可能な状態においてFabry Perot 共振器の実験を行なうには、共振器の特性がFresnel 数のみで記述されることを利用して、光学的波長の領域からミリ波あるいはセンチ波にまで尺度を拡大(scale up)して、マイクロ波模型によつて実験を行なうのが一つの方法である。これは流体力学における実験の立場と逆である。最初にのべた様にFabry Perot 干涉計はレーザーの発明以前にセンチ波用の高いQをもつ共振器として利用され<sup>59)</sup>又後にのべる応用の立場からの提案と簡単な実験もなされていたが、それ

らはFabry Perot 共振器自身の諸特性を系統的に実験，研究することはなかつた。Fox, Li による共振器の理論的な解析の後彼等の注意によりScheibe<sup>60)</sup>(1961)がセンチ波によつて平面鏡共振器の実験を再び行ない，理論による回折損失を実験によつて確認したが，ひきつゞいて研究は行なわなかつた。其後Koppelman<sup>61)</sup>(1963)はセンチ波において平行平面共振器の系統的な実験を行ない，Q，周波数変移，近接および遠方パタンの測定を行なつた。球面鏡共振器の実験はZimmerer(1962)<sup>62)</sup>(1963)<sup>63)</sup>，Neumann, Volle<sup>64)</sup>(1964)等がミリ波で，又Westermann, Maier<sup>65)</sup>(1964)が平面鏡，球面鏡に対しミリ波でそれぞれ実験を行なつている。Dee, Sheppard<sup>66)</sup>(1965)はミリ波において平面鏡共振器を種々の励振方法により実験している。変形した共振器に関連する実験はKoppelman<sup>67)</sup>(1965)が斜入射波による励振の測定を行なつており，又Checcacci, Scheggi<sup>68)</sup>(1965)は平面鏡共振器の鏡面歪の場合の場の分布の測定をセンチ波で行ない，変形に関して敏感であることを示している。以上のような開口共振器の実験的研究は自由減衰モードの研究と云うよりは本質的に励振の実験であることに注意する必要がある。

Fabry Perot 共振器の応用面に関しては，光学用の高分解能干渉計，レーザー共振器は云うまでもないことであるが，種々の研究，提案がなされている。上にのべた様に，レーザー発明以前に既にミリ波測定用の高いQをもつ共振器としてKing, Scheibe等<sup>59)</sup>(1955)が使用しているが，Culshawはマイクロ波用の反射器(1959)<sup>69)</sup>，およびミリ波用の高いQをもつ波長計ならびにミリ波帯誘電率測定用(1960)<sup>70)</sup>としてFabry Perot 共振器を用いることを提案し，等価回路による解析とミリ波での実験を行なつた。更に又ミリ波，サブミリ波帯メーザーの共振器としての提案(1961)<sup>71)</sup>をも行なつている。ミリ波用の反射器の設計に関するWelling, Andressen<sup>72)</sup>(1964)等による研究報告もある。このようなQの高いための感度を利用する測定器としてプラズマ診断に用いる提案ならびに研究，実験がAshby, Tephcott<sup>73)</sup>(1963)，Gerardo, Verdeyen<sup>74)</sup>(1963)，Auston, Primich, Hayami<sup>75)</sup><sup>76)</sup>(1964)，Longren, Mink, Beyer<sup>77)</sup>(1964)等によつて行なわれている。

以上の例から示されるように，光学領域の波長の測定をマイクロ波のように行なうことは大変困難であるが，Fabry Perot 共振器はその有力な武器であることがうかがわれる。

## 第 2 章 空 洞 理 論

### § 1 序 論

この研究を行なった当時 (1963) においては, Fabry Perot 共振器の取扱いは Fox, Li<sup>17)</sup> の研究で代表される干渉計像に基づく理論が唯一のものであり, 又知られていた解は高速電子計算機によるシミュレーションで二三の数値解として求められたもののみであつた。この様な干渉計理論の定式化は次の仮定を基礎においている。i) 波動は鏡面に垂直な軸方向に対して殆ど平面波とみなす。ii) 鏡面から対向する鏡面に向う波動の輻射には Kirchhoff 近似を使用する。iii) 共振条件をあらわす第 2 種 Fredholm 型の積分方程式の固有値は共振の減衰を記述する。iv) 更に基礎となる方程式であるこの積分方程式の積分核を簡単にするために後にのべる Fresnel 数  $N$  を比較的小さい値として 20 以下に制限する必要があつた。仮定 ii) は波長が鏡面の寸法に比して十分小さい時にはアンテナの様に一方向の輻射に対しては正しいことが知られている。しかしながら波動が鏡面間を多重往復する共振現象に対しては明らかではない。すなわちこの仮定は外部を自由空間とする代りに鏡面の位置する無限平面上において鏡面以外の部分を完全吸収壁とみなすことと同等である。iii) の仮定は波動が第 1 の鏡面より第 2 の鏡面に伝播によつて到達した場合の振巾の減衰率が固有値によつてあらわされるとする干渉計像に基づく直観によつてゐる。しかし波動の共振現象としての時間的変化は波動方程式より導びかれるべきものであり, 又更に干渉計理論の基礎方程式も波動方程式より導出されるべき性質のものである。この後者の点に関しては後に Vainshtein<sup>50)</sup> が研究を行ない干渉計理論の基礎方程式の立場を明らかにしている。Fabry Perot 共振器の自由振動モードならびにその減衰率としての回折損失は Fox, Li が干渉計理論によつて二三の数値解を見出しているが, 次の理由によつて解を解析的に式の形としてあらわに求める必要があつた。まず第 1 にシミュレーションによつては 2 つの自由振動モードの存在が知られたが, 他のモードがどのような形で存在するのかは知られていないことである。第 2 に, 当時のレーザー共振器の Fresnel 数は現在使用されているものとは違つてかなり大きい値, たとえば  $N \approx 200$  位のものが使用されていたが, その様な大きい Fresnel 数に対するモードならびに回折損失を求めることは上の iv) によつて基礎方程式の適用範囲外であつて, 又かりに適用範囲内であつてもシミュレーションを行なうことが困難である。更に第 3 にこの方程式を解くた

めのシミュレーションにはかなり大型の高速電子計算機を必要とし、簡単に遂行することが出来ないことである。

この研究では次の理由で干渉計理論を離れた。干渉計理論は定式化そのものが非常に簡単であるという利点をもっているが、固有値方程式としての第2種Fredholm型の積分方程式を、たとえば摂動法で解くことが困難である。又将来において更に一般的な問題、たとえば鏡面変形、励振、変調、媒質で満たされた共振器の問題等に適用することが困難である。特に、鏡面に製作上あるいは調整上の誤差のある場合の共振器の特性を、シミュレーションによらず解析的に取扱いうるような定式化を行なう必要があつた。この章で述べる研究はその様な問題を取扱う意図をもつて行なわれ、第3章において実際に鏡面変形の問題を取扱うための前段階となつている。

この章における取扱いにおいては、マイクロ波における様に閉じた空洞共振像を出発点としている<sup>1)</sup>。通常のマイクロ波共振器の理論と異なるところは、共振が非常に高次のモードでおこることと、側壁としての開口面が非常に大きいことである。したがつて理論は開口よりの輻射を考慮するために空洞理論とアンテナ理論との組合せ問題として取扱われ、時間的な変化は空洞共振のQ値としてあらわされている。取扱いを簡単にするために波動の場をスカラー波によつて記述し、標準的な電磁場の空洞理論<sup>18)</sup>に対応するものをまず書きあらわす。空洞内の固有函数としては種々の取り方が考えられるがこの章では開口面における境界条件として2種類の型のものをとりあげ、それに対応する固有函数を2種類用いて理論を平行に進める。開口面より外部に向う輻射は境界値問題としてKirchhoff近似を用い、Green函数によつて記述し、空洞振動に対する輻射の反作用としての摂動項を開口面における面積分として求める。問題を円型平行平面共振器に対して適用するために§4において円筒座標表示による自由空間のGreen函数を複素積分によつて求める。又第4章以下で用いる無限平行平面導波管の円筒表示のGreen函数をもそこで与える。§5においてこのGreen函数をもちいて、各固有函数に対する対角摂動行列要素としての面積分を計算し、§6においてレーザー共振器と云う特殊事情を用いて各固有振動の共振のQおよび回折損失、周波数変化などを求める。この様にして損失の近似的な表式が簡単な形で求められる。この研究が発表された頃には各国においてFabry Perot共振器の回折損失を解析的に求めた結果がいくつか発表された<sup>38) 46) 47)</sup>。それらの結果は、求めた方法がすべて異なっているにも拘らず非常によく似た結果である。それらとの比較を最後に行なう。



## § 2 スカラー波の共振理論

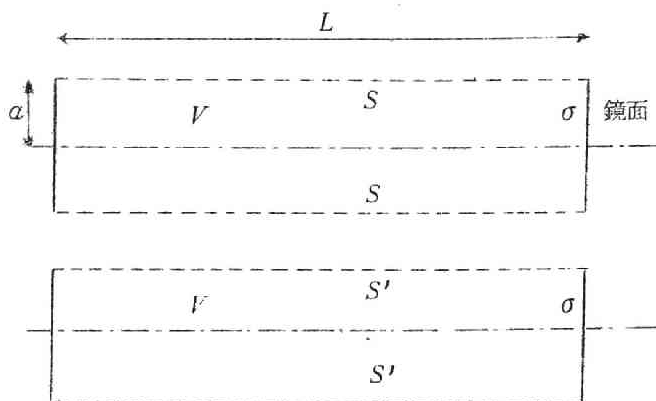


図 2. 1

レーザー共振器は図の様に柱状のもので、頂面 $\sigma$ は反射鏡であつて、内、外部は自由空間とし、柱面 $S$ は開いているものとする。 $S$ と $\sigma$ によつて囲まれる領域 $V$ を内部と名づける。外部と内部 $V$ とで媒質が異なる場合にも一般化することは可能である。

スカラー波に対する波動方程式は

$$\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

であらわされる。但し $C=1$ の単位系を用いる。 $V$ の中に閉じた空洞の固有振動があるとすればそれは開口面 $S$ よりの輻射によつて減衰してゆくが、どのような固有振動が考えている開いた共振器の自由振動モードのよい0次近似を与えるかは前もつて知ることは出来ないので、こゝでは2種類の固有函数系を比較のために考えることにする。そうしてそれらのうち低次のモードについて輻射損失を求める。

$V$ 内における固有函数系 $\{u_\nu\}$ として次のHelmholtzの方程式を満足するものをとる。但し $\nu$ は固有値 $\omega_\nu$ を指定するパラメタ、 $\{u_\nu\}$ は対応する固有函数全体を意味するものとする。

$$\nabla^2 u_\nu + \omega_\nu^2 u_\nu = 0 \quad (2.2)$$

境界条件として

$$S \text{ 型} : u_\nu = 0 \quad (2.3)$$

$$S' \text{ 型} : \frac{\partial u_\nu}{\partial n} = 0 \quad (n \text{ は面の外向き法線}) \quad (2.4)$$

の2種類を定義し、頂面 $\sigma$ はS型とする。2種類の固有函数系 $\{u_\nu\}$ として、一つは開いた柱面でS型の境界条件を、一つは $S'$ 型の境界条件を満たすものとする。これらはそれぞれ $V$ の中で完全直交系をつくっており、且つ規格化されているものとする。 $S'$ 型をとりあげた理由は最低次のモードが $V$ 内で完全な平面波共振をあらわしているからである。他の固有函数系をとることも出来るがそれはS型と $S'$ 型の間属する混合境界条件を満たすものである。

波動方程式(2.1)を $V$ において $\{u_\nu\}$ で展開するならば、(2.1)はFourier係数に対する運動方程式に帰着する。

$$-\frac{d^2}{dt^2} A_\nu - \omega_\nu^2 A_\nu - \int_\sigma u \frac{\partial u_\nu}{\partial n} d\sigma - \int_S u \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS = 0 \quad (S\text{型}) \quad (25)$$

$$-\frac{d^2}{dt^2} A_\nu - \omega_\nu^2 A_\nu - \int_\sigma u \frac{\partial u_\nu}{\partial n} d\sigma + \int_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} u_\nu dS = 0 \quad (S'\text{型}) \quad (26)$$

但しここで

$$u = \sum_\nu A_\nu u_\nu, \quad A_\nu \equiv \int_V u u_\nu dV \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \sum_\nu B_\nu u_\nu, \quad B_\nu \equiv \int_V \nabla^2 u u_\nu dV \\ &= -\omega_\nu^2 A_\nu - \int_{S,\sigma} u \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS + \int_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} u_\nu dS \end{aligned} \quad (28)$$

とおき、(2.8)ではGreenの公式と(2.2)を用いた。(2.5)(2.6)の $\sigma$ 上の積分は鏡面が半透明の場合、変形した場合、あるいは励振する場合にあらわれるものであるが、この章で取扱う完全な鏡面に対して $\sigma$ 上で境界条件 $u=0$ を満たすものとすればこの項はあらわれない。今一つの特別な $u_\nu$ のみに注目し、上の運動方程式において開口面上の積分がFourier係数 $A_\nu$ の運動方程式に対し摂動として効いてくると考える。その時0次近似では

$$u \sim A_\nu u_\nu \quad (29)$$

であつて、1次近似における補正が面積分によつて与えられる。

### § 3 開口面よりの輻射と摂動

$u$ の第1次近似の補正は開口面から波動が外部に輻射されるために生ずる。鏡面の裏面の効

果が無視出来るとすれば外部は自由空間における輻射場と考えることが出来る。外部における自由空間のGreen函数を  $G(X|X')$  とすればそれは方程式

$$(\nabla_X^2 + \omega^2) G(X|X') = -\delta(X - X') \quad (2.10)$$

を満足する。ここで  $\nabla_X^2$  は変数  $X$  に関する Laplace 演算子,  $\delta(X)$  は3次元のDiracの $\delta$ 函数をあらわす。外部の場合はGreenの公式によつて

$$u(X) = -\int_S G(X|X') \frac{\partial u(X')}{\partial n'} dS \quad (S \text{ 型}) \quad (2.11)$$

$$u(X) = \int_{S'} \frac{\partial G(X|X')}{\partial n'} u(X') dS \quad (S' \text{ 型}) \quad (2.12)$$

で与えられる。こゝで鏡面の裏面の効果を無視し, Kirchhoff 近似を用いている。したがつて運動方程式 (2.5) (2.6) にあらわれる面積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} -\int_S u \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS &= A_\nu \iint_S \frac{\partial u_\nu(X)}{\partial n} G(X|X') \frac{\partial u_\nu(X')}{\partial n'} dS dS' \\ &\equiv A_\nu I_0 \quad (S \text{ 型}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} u_\nu dS &= A_\nu \iint_{S'} u_\nu(X) \frac{\partial^2 G(X|X')}{\partial n \partial n'} u_\nu(X') dS dS' \\ &\equiv A_\nu I_1 \quad (S' \text{ 型}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

と書かれる。但し, (2.14) のGreen函数の微分は特異性を考慮して  $X$  は  $S'$  の外部から  $X'$  は  $S'$  の内部からそれぞれ  $S'$  面に近づけた極限值をとるものとする。(2.13) (2.14) の積分を実行して (2.5) (2.6) にそれぞれ代入すれば  $A_\nu$  に対する唯一つの運動方程式を取扱うだけとなる。(2.13) (2.14) の表面積分を

$$I_0 \equiv \alpha_0 + i\beta_0, \quad I_1 \equiv \alpha_1 + i\beta_1 \quad (2.15)$$

とおくならば (2.5) (2.6) において  $A_\nu$  の時間的变化を複素周波数  $\omega$  で記述するとき

$$\omega^2 - \omega_\nu^2 + I = 0 \quad (2.16)$$

となる。これから  $I/\omega_\nu^2 \ll 1$  を考慮すれば

$$\omega \simeq \left( \omega_\nu - \frac{\alpha}{2\omega_\nu} \right) - i \frac{\beta}{2\omega_\nu} \quad (2.17)$$

従つて  $u_\nu$  の固有周波数の変化  $\Delta\omega_\nu$  および共振の  $Q$  は

$$\Delta \omega_\nu = -\frac{\alpha}{2\omega_\nu} \quad (2.18)$$

$$Q = \frac{\omega_\nu^2}{\beta} \quad (2.19)$$

で与えられる。後に回折損失として1トランジット損失 (1 transit loss)  $\delta d$  を定義する。これは平面波が鏡面間を1回伝播する毎に失う回折損失であつて (2.19) と

$$\delta d = \frac{n\pi}{Q} = \frac{\beta L}{\omega_\nu} \quad (2.20)$$

の関係がある<sup>17)</sup>。こゝに  $n$  は鏡面間にあらわれる定在波の数であつて  $2L/\lambda$  で与えられる。 $\lambda$  は波長である。

(2.13) (2.14) の表面積分を実行する為には面の形状ならびに  $u_\nu$  の形に応じて積分が容易な Green 函数を選ぶことが必要である。次節では平行円板型 Fabry Perot 共振器について実行する為に円筒表示の Green 函数を求める。

## § 4 円筒表示の Green 函数

### § 4.1 自由空間の Green 函数

積分表示

(2.10) を円筒座標であらわに書けば

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right) G(r\theta z | r'\theta' z') = -\frac{\delta(r-r') \delta(\theta-\theta') \delta(z-z')}{|r-r'|} \quad (2.21)$$

但しこゝで  $|r-r'|$  は2点間の距離を  $(r, \theta)$  面に射影したものをあらわす。これを  $\theta$  部分には Fourier 級数,  $z$  部分には Fourier 積分,  $r$  部分には Fourier-Bessel 積分を用いて解く。即ち  $G(r\theta z | r'\theta' z')$  はそれらによつて次の様にあらわされる。

$$\begin{aligned} G(r\theta z | r'\theta' z') \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \lambda g(k, \lambda) J_l(\lambda r) J_l(\lambda r') e^{il(\theta-\theta')} e^{ik(z-z')} \end{aligned} \quad (2.22)$$

こゝで  $g(k, \lambda)$  は  $l$  に関係しない Fourier 係数である。便宜上  $r'=0$   $\theta'=0$

$z=0$  において解き、後に変数の置き換えを行なう。(2.21)の右辺に附録(A.2.1)～(A.2.3)を代入し、(2.22)を左辺に代入して(A.2.4)を用いるならば容易に  $g(k, \lambda)$  が求められ

$$G(r, \theta, z|0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda J_0(\lambda r) e^{ikz}}{\omega^2 - k^2 - \lambda^2} \quad (2.23)$$

となる。求めるGreen函数の積分表示は変数の移動

$$(r, \theta, z) \rightarrow (|r - r'|, \theta - \theta', z - z') \quad (2.24)$$

但し

$$|r - r'| \equiv \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')} \quad (2.25)$$

を行なうことによつて得られる。(A.2.5)の加法定理を用いれば

$$\begin{aligned} G(r, \theta, z|r', \theta', z') \\ = -\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon_l \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda J_l(\lambda r) J_l(\lambda r') \cos l(\theta - \theta') e^{ik(z - z')}}{\omega^2 - k^2 - \lambda^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

が得られる。以下ではGreen函数として(2.26)を使用するが、変数の移動(2.24)は必要の生じた時に最終的に行なうことにし、それまでは便宜上(2.23)の形で使用してゆく。

## 積 分 路

(2.23) (2.26)は被積分函数が分母に0点を持つので、これは2変数の複素函数として定義され各積分変数の積分路を指定する必要がある。今は自由空間の場合を考えているので無限遠方における輻射条件を満足する様に積分路を定める。積分は2変数にわたるから積分の順序の変更が許されるならば結果は積分をどちらの変数について先に行なうかには依らない筈である。この様にして2種類の円筒表示が求められる。結果の同等性の証明を附録2.2に与える。

[A]  $k$  について先に積分する場合

$k$  についての積分路は結果が外向波であることを要請することによつて定める。時間因子は  $e^{-i\omega t}$  とする。(2.23)の被積分函数は  $k$  に関し

$$\mathcal{Q}(\lambda) = (\omega^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

に極をもつ。この  $\Omega$  は変数  $\lambda$  に関して 2 値の函数である。今  $\Omega$  の偏角が 0 (正の実数) の時に外向波をあらわすように積分路を指定する。そのためには  $z \gtrless 0$  に応じて積分路を図のように上半面、又は下半面の無限遠方をまわるものとする。その時

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz} dk}{\omega^2 - \lambda^2 - k^2} = i \frac{e^{i\Omega|z|}}{2\Omega} \quad (2.28)$$

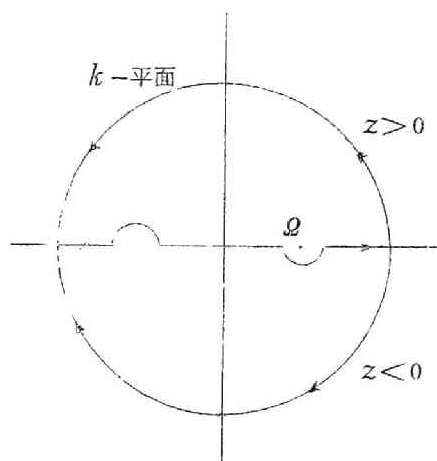


図 2.2

となる。これで  $\Omega$  が正の実数の時の積分が得られたから、他の複素数の  $\Omega$  に対してはこれから定義出来る範囲内で解析接続によつて積分を定義する。従つて

$$G(r, \theta, z | 0) = \frac{1}{4\pi_0} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_0(\lambda r) \frac{e^{i\Omega(\lambda)|z|}}{\Omega(\lambda)} \quad (2.29)$$

$\Omega(\lambda)$  は  $\lambda$  に関して 2 値の函数であり、 $\lambda = \omega$  に分岐点を持つ。結果が外向波であるためには  $\lambda$  に関する積分路は分岐点を下にまわるようにとることが必要である。この様にすれば<sup>78)</sup>

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(i\omega \sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (2.30)$$

となつてよく知られた自由空間の Helmholtz のポテンシャル函数に帰着する。(2.29) に加法定理 (A 2.5) を用いたものが求める円筒表示の Green 函数である。

[B]  $\lambda$  について先に積分する場合

(2.29) は  $z$  に関して外向波であることを示しているが  $r$  に関しては完全な定在波としてあらわれている。次には  $r$  に関して外向波であるような表示を求める。(2.23) の被積分函数は  $\lambda$  に関し

$$S(k) = (\omega^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

に極をもつ。 $S(k)$  は変数  $k$  に関して 2 値の函数である。今  $S$  の偏角が 0 の時に外向波を与えるように積分路を指定する。Watson<sup>78)</sup> (p. 424) にある様に  $H_0^{(1)}$  を図 2.3 上図の様に積分するかあるいは、 $J_0$  を  $H_0^{(1)}$  と  $H_0^{(2)}$  の和として図 2.3 下図の様に積分することによ

つて

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{\lambda^2 - S^2} \\ &= \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(Sr) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

なる外向波が得られる。これで  $S$  が正の実数の時の積分が得られたから、他の複素数値の  $S$  に対しては定義出来る範囲内でこれからの解析接続によって定義する。従つて

$$\begin{aligned} & G(r, \theta, z | 0) \\ &= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty dk H_0^{(1)}(S(k)r) e^{ikz} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$S(k)$  の分岐点  $k = \pm\omega$  を避けて通る積分路を図 2.4 の様に指定する。 $k = \pm\omega$  では  $S = 0$  であつて、ここは  $H_0^{(1)}$  の特異点でもあり分岐点にもなっている。 $S(k)$  の偏角は  $k = 0$  で 0 になる様に指定しておくと同図に示されている様に積分路に沿う  $S(k)$  の偏角が定まる。従がつて積分は、 $k = \pm\omega$  での小半円の積分の寄与は無視できることが示されるので、 $k$ -平面の虚軸に関して対称となり (2.3.3) は

$$\begin{aligned} & \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty dk H_0^{(1)}(\sqrt{\omega^2 - k^2} r) e^{ikz} \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty dk H_0^{(1)}(\sqrt{\omega^2 - k^2} r) \cos kz \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(i\omega \sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

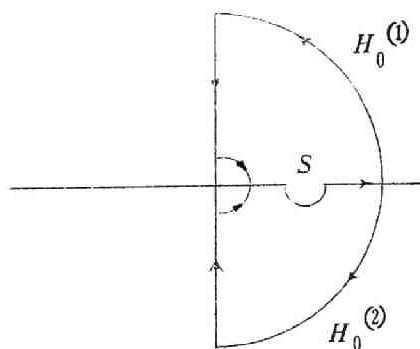
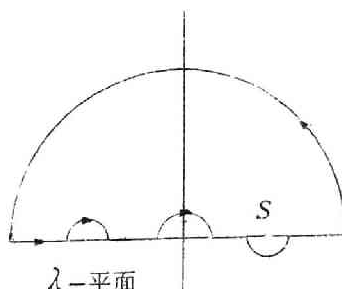


図 2.3

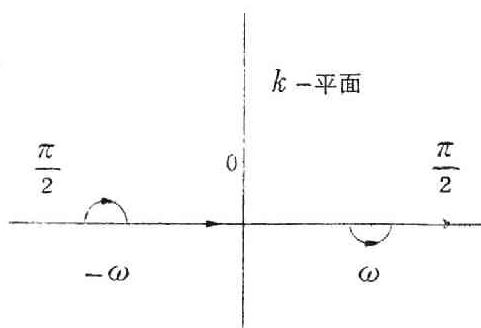


図 2.4

となつて (2.3 0) に等しくなる筈である。(2.3 4) を直接証明することは困難であるが積分路を変形して (2.2 9) に帰着させる証明を附録 2.2 に示す。(2.3 4) の関係は文献 19) では異なつた方法で導びかれている。円筒表示の Green 函数は (2.3 3) において加法定理 (A 2.6) を用いて得られる。

## § 4.2 平行平面導波管の Green 函数

こゝでは後に第 4 章以下で必要になる無限平行平面導波管の Green 函数の円筒表示を求める。本質的に上の [B] の変形であるのでここにつけ加えた。

平行平面導波管は  $z=0$ ,  $z=L$  に位置し, Green 函数はその上で  $S$  型の境界条件 (2.3) を満たすものとする。この時 (2.2 1) を解く場合には Fourier 積分の代りに Fourier 級数を用い, したがつて (A 2.2) の代りに

$$\delta(z-z') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{L} \sin \frac{n\pi z'}{L} \quad (2.35)$$

を用いる。あとは同様であつて, (2.3 3) に対応して

$$G(r, \theta, z | 0, 0, z') = \frac{i}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) H_0^{(1)}\left(\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} r\right) \quad (0 \leq z, z' \leq L) \quad (2.36)$$

がえられる。求める円筒表示の Green 函数は (2.3 6) に変数移動を行なつて加法定理 (A 2.6) を用いたものである。

## § 5 表面積分 $I_0, I_1$

前節に求めた Green 函数を使用して  $V$  の中の 2 種類の固有函数系について (2.13) (2.14) の表面積分  $I_0, I_1$  を求める。 $V$  の中の 2 種類の固有函数系, 即ち開口面で (2.3) 又は (2.4) の境界条件  $S$  型又は  $S'$  型を満足するものは, 量子数の組  $\nu = (\ell, m, n)$  に対応して

$$u_\nu = \frac{1}{N_\nu} J_\ell\left(A_{\ell m} \frac{r}{a}\right) \begin{Bmatrix} \cos \ell \theta \\ \sin \ell \theta \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \quad (S, S' \text{ 型}) \quad (2.37)$$

$$\ell, m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$



但し，

$$J_l(A_{lm}) = 0, \quad N_\nu^2 = \frac{\pi L a^2}{2 \varepsilon_l} [J'_l(A_{lm})]^2 \quad (S \text{型}) \quad (2.38)$$

$$J'_l(A_{lm}) = 0, \quad N_\nu^2 = \frac{\pi L a^2}{2 \varepsilon_l} \left[ 1 - \frac{l^2}{A_{lm}^2} \right] [J_l(A_{lm})]^2 \quad (S' \text{型}) \quad (2.39)$$

$$\omega_\nu^2 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{A_{lm}}{a} \right)^2 \quad (2.40)$$

で与えられる。 $m$ は(2.38) (2.39)のBessel函数の根の番号である。Green函数としては(2.33)の形を採用する。本章および第3章における空洞理論においては最初Green函数として(2.29)の形が用いられた。数学的には同等であるが後章におけるより一般的な場合には，表面積分の実際の計算に当り(2.29)の形は収束の問題で面倒な点が見出された。従つて統一を期する為以下においては(2.33)の形を用いることにする。

(2.33)に加法定理(A 2.6)を用いたものを(2.37)と共に(2.13) (2.14)に代入し，

$$\int_0^L \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos l\theta}{\sin l\theta} \right\} \left\{ \frac{\cos l'\theta}{\sin l'\theta} \right\} a d\theta dz = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \frac{\pi a L}{\varepsilon_l} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L dz \int_0^L dz' \cos k(z-z') \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi z'}{L}\right) \\ &= \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(\frac{n'\pi}{L}\right) \frac{[1 + (-1)^{n-n'}] [1 - (-1)^n \cos kL]}{[k^2 - (\frac{n\pi}{L})^2] [k^2 - (\frac{n'\pi}{L})^2]} \end{aligned} \quad (2.42)$$

等の関係を用いて整理すれば，表面積分は次の形に書くことが出来る。

$$I_0 = \int_S \int_{S'} \frac{\partial u_\nu}{\partial r} G(x|x') \frac{\partial u_\nu}{\partial r'} dS dS' = i 4 A_{lm}^2 \frac{n\pi}{L^2} [I_0' + i I_0''] \quad (2.43)$$

$$I_1 = \iint_S u_\nu(x) \frac{\partial^2 G(x|x')}{\partial r \partial r'} u_\nu(x') dS dS'$$

$$= i^4 \frac{n\pi}{L^2} \left[ 1 - \frac{\ell^2}{A_{lm}^2} \right]^{-1} \{I_1' + i I_1''\} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{matrix} I_0' + i I_0'' \\ I_1' + i I_1'' \end{matrix} \right\} = \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \int_0^\infty \frac{1 - (-1)^n \cos(\kappa \frac{L}{a})}{(\frac{n\pi a}{L})^2 - \kappa^2} \left\{ \begin{matrix} H_l^{(1)}(A) J_l(A) \\ A^2 H_l^{(1)'}(A) J_l'(A) \end{matrix} \right\} d\kappa \quad (2.45)$$

但し

$$A^2(\kappa) \equiv (\omega a)^2 - \kappa^2, \quad \kappa \equiv ka \quad (2.46)$$

とおいた。(2.45)の右辺{ }の中は、左辺に対応してとるものとする。

## § 6 数値計算 (レーザー共振器の場合)

前節までの結果をレーザー用の Fabry Perot 共振器に対し、実用の寸法を使用して計算を行なう。

例えば

$$\frac{L}{a} = 10 \sim 100, \quad a = 0.5 \sim 2 \text{ cm}$$

$$L = 5 \sim 200 \text{ cm}$$

$$\text{波長: } \lambda = 5,000 \sim 10,000 \text{ Å}$$

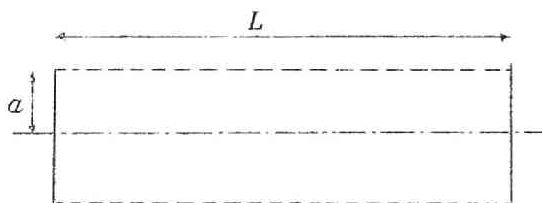


図 2.5

とすれば、低次の横モード量子数  $\ell, m$  が 10 以下の時

$$n \simeq \frac{2L}{\lambda} = 10^5 \sim 10^7 \quad \omega a \simeq \frac{n\pi a}{L} \gg A_{lm} \quad (2.47)$$

が成立する。Fox Li の用いた Fresnel 数  $N$  に換算すれば

$$N = \frac{a^2}{\lambda L} = 0.1 \sim 10^4 \quad (2.48)$$

程度である。初期のレーザーでは  $N \simeq 500$  程度のものがあつたが、現在使用されているガスレーザーでは  $N \simeq 10$  位である。

Fox, Li の干渉計理論<sup>17)</sup>では Fresnel 数  $N$  に制限があり

$$N \equiv \frac{a^2}{\lambda L} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2 \quad (2.49)$$

である必要があり,  $N=0.5 \sim 10$  程度の値に対してシミュレーションによる数値解析がなされている。空洞理論の適用性は  $N$  の大きいところにあり  $N \gg 1$  であることが必要である。

実用のレーザー共振器において成立っている条件 (2.47) に対して表面積分を近似計算する。(2.45) の被積分関数において (2.47) を考慮し  $\omega = \omega_\nu$  とおけば

$$\frac{n\pi a}{L} \frac{1 - \cos\left(\kappa \frac{L}{a} - n\pi\right)}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right]^2} \simeq (\omega a) \frac{1 - \cos \frac{A_{lm}^2 - A^2}{4\pi N}}{\left[A_{lm}^2 - A^2\right]^2} \quad (2.50)$$

となる。ここで  $A^2 / (\omega a)^2 \ll 1$  を用いているがこれは (2.47) の条件のもとでは積分はこの近似の成立範囲で十分速く収束するからである。

(2.45) における積分変数を (2.46) によつて  $\kappa$  から  $A$  に変えると, 積分領域は  $A$  の偏角に応じて2部分にわかれて

$$d\kappa = - \frac{A dA}{\sqrt{(\omega a)^2 - A^2}}, \quad \text{Arg}(A) = 0 \quad (\kappa < \omega a)$$

$$d\kappa = \frac{A dA}{\sqrt{(\omega a)^2 + A^2}}, \quad \text{Arg}(A) = \frac{\pi}{2} \quad (\kappa > \omega a) \quad (2.51)$$

となるから, 積分領域はそれぞれ  $\int_0^{\omega a}, \int_0^\infty$  となる。積分が  $\omega a \gg A$  の範囲内で十分速く収束するので第1の積分の上限  $\omega a$  は実質的に  $\infty$  としてよく, 又, (2.51) で  $\sqrt{(\omega a)^2 \pm A^2} \simeq \omega a$  である。従つて (2.45) の積分は

$$H_l^{(1)}(iA) J_l(iA) = - \frac{2i}{\pi} K_l(A) I_l(A) \quad (2.52)$$

等の関係を考慮すれば次の様にあらわされる。

$$\left. \begin{matrix} I'_0 \\ I''_1 \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_{lm}^2 - A^2)}{[A_{lm}^2 - A^2]^2} \left\{ \begin{matrix} J_l(A) \\ A J'_l(A) \end{matrix} \right\}^2 A dA \quad (2.53)$$

$$\left. \begin{matrix} I'_0 \\ I''_1 \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_{lm}^2 - A^2)}{[A_{lm}^2 - A^2]^2} \left\{ \begin{matrix} N_l(A) J_l(A) \\ A^2 N'_l(A) J'_l(A) \end{matrix} \right\} A dA$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_{lm}^2 + A^2)}{[A_{lm}^2 + A^2]^2} \left\{ \begin{matrix} K_l(A) I_l(A) \\ A^2 K'_l(A) I'_l(A) \end{matrix} \right\} A dA \quad (2.54)$$

但し

$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N} \quad (2.55)$$

とおいた。 $N > 1$ であれば $\alpha \ll 1$ とみなすことが出来る。この時、(2.53)および(2.54)の被積分函数は、第1因子の $A$ に関し緩く変化する部分と、第2因子のBessel函数によつて速く変化する部分とからなっている。 $I'_0, I'_1$ の被積分函数の形は大体図2.6のようになる。

$I'_0, I'_1$ は実際に輻射損失をあらわす項であるから図2.6は輻射の指向性をあらわしていると

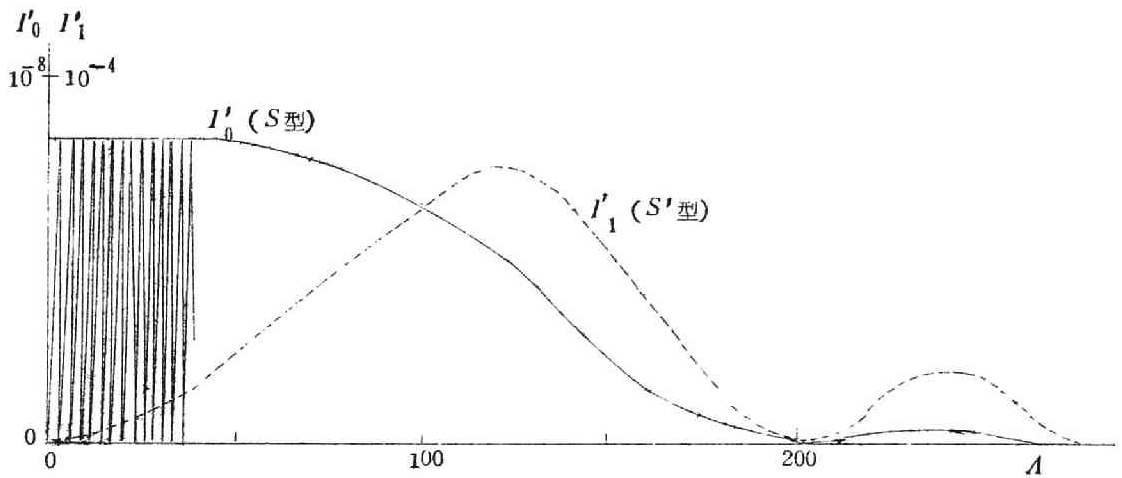


図 2.6 積分  $I'_0, I'_1$  の被積分函数の形

考えることが出来る。 $\lambda = 10^4 A, \alpha = 0.5 \text{ cm}$ とすれば $A = 200$ のところで $10^{-2}$  ラチアンに対応するので、このFresnel数の場合には輻射が殆ど軸方向に出ていることになる。これは回折損失の別の表現である。積分に大きく寄与する範囲では殆ど $A$ に対しBessel函数は漸近形を使うことが出来る。その時(2.54)の第1項の積分の寄与はあらわれない。積分を数値積分によつて求める。著しい事に上の積分値は殆ど $A_{lm}$ の値に依存しないことが確かめられる。これらのことを用いるならば積分のパラメタ $N$ に対する函数関係が簡単な形で求められる。即ち $N \rightarrow AN$ とおくとき $A_{lm}^2 \rightarrow \pm A A_{lm}^2$ とするときの積分値の変化が無視出来ることから

$$I(AN) \simeq \left\{ \begin{matrix} A^{-\frac{3}{2}} \\ A^{-\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} I(N) \quad (2.56)$$

が成立つことが示され、 $I(N)$ は $N$ の同次函数であらわされる。従つて上の積分はたとえば

$N=100$  における数値積分の値からすべての  $N$  に対する積分値が求められる。この様にして得られた結果はモードに関係なく

$$I_0 + i I_0' \simeq 0.60 \times 10^{-2} (1 - i) N^{-\frac{3}{2}} \quad (2.57)$$

$$I_1 + i I_1' \simeq 0.113 (1 + i) N^{-\frac{1}{2}} \quad (2.58)$$

となる。上の近似がわるくなるのは、Bessel 函数の漸近形を用いて被積分函数の急速に振動する部分を平均値におきかえることが許されなくなる場合であつて、(2.57) (2.58) は  $N \leq 5$  に対しては適用出来ない。(2.53) (2.54) の積分はこゝでは数値積分によつて求められたが、後に第4章において更に一般的な場合も含めて解析的に積分が実行される。その特別な場合として上の結果は再確認される。

(2.18) (2.19) (2.20) および積分の定義 (2.43) (2.44) によつて

$$Q = \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{1}{\delta d} \quad (2.59)$$

$$\delta d = 4 \left\{ \left[ 1 - \frac{A_{lm}^2}{L^2} \right]^{-1} \right\} I' \quad (2.60)$$

$$\Delta \omega = \frac{2}{L} \left\{ \left[ 1 - \frac{A_{lm}^2}{L^2} \right]^{-1} \right\} I'' \quad (2.61)$$

で与えられるから (2.57) (2.58) を代入すれば

$S$ 型

$$Q = 258 A_{lm}^{-2} \frac{L}{\lambda} N^{\frac{3}{2}} \quad (2.62)$$

$$\delta d = 240 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (2.63)$$

$$\Delta \omega = -120 \times 10^{-2} \frac{1}{L} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (2.64)$$

$S'$ 型

$$Q = 13.7 \left[ 1 - \frac{L^2}{A_{lm}^2} \right] \frac{L}{\lambda} N^{\frac{1}{2}} \quad (2.65)$$

$$\delta d = 0.450 \left[ 1 - \frac{\ell^2}{A_{lm}^2} \right]^{-1} N^{-\frac{1}{2}} \quad (2.66)$$

$$\Delta \omega = 0.225 \frac{1}{L} \left[ 1 - \frac{\ell^2}{A_{lm}^2} \right]^{-1} N^{-\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

となる。但し、 $A_{lm}$  は  $S$  型では (2.38)、 $S'$  型では (2.39) を満足する。

上の関係からわかることは  $S'$  型の回折損失、周波数変化は殆んどモードに依存しないことであり、特に  $\ell=0$  に関しては全く依存しない。又図 2.7 に示される様に  $S'$  型は  $S$  型に比して損失は一般に 1 桁ないし 4 桁大きい値をとる。 $S'$  型の固有振動では面  $S'$  上の境界値  $u \neq 0$  のために輻射量が大きく、しかもこの値は面  $S'$  上においてモードに大きく依存しない。一方  $S$  型の固有振動では面  $S$  上で  $u=0$  であるため輻射量は少なく、輻射はもっぱら  $\partial u / \partial r$  の値に依存しているが、この大きさはモードに著しく依存しているのである。

以上の解析によつて  $S'$  型の損失、周波数変化は  $S$  型のそれに比して非常に大きいことが示された。§ 2、§ 3 ではモード間の結合を無視し、摂動の対角線行列要素のみによつて自由振動を論じられると仮定したが、 $S'$  型の摂動は  $S$  型に比しかなり大きいからこの  $S'$  型では対角線行列要素のみでは自由振動を記述しないものと考えられる。従つて (2.65) (2.66) の結果は、ある時刻に  $S'$  型の振動が共振器内に存在したとする時、その時刻の附近での  $S'$  型の振動の減衰を記述する量として受けとられるべきである。一般的には自由振動は  $S$  型と  $S'$  型の間位置するものと考えられるが、上の 2 種の両極端の境界条件をもつ固有函数の摂動の受け方から、自由振動は  $S$  型の固有函数に非常に近いものと考えられる。そうして  $S$  型の固有函数を 0 次近似として求めた (2.63) (2.64) は、対応する自由振動の回折損失、周波数変化とすることが出来る。(2.63) を

$$\delta d = A_{lm} N^{-\frac{3}{2}} \quad (2.68)$$

と書いて、係数  $A_{lm}$  を表 2.1 に示す。(2.62) (2.65) で与えられる 2 つの型の最低次

$m \backslash \ell$	0	1	2	3
0	0.138	0.352	0.633	0.977
1	0.731	1.18	1.70	2.29
2	1.80	2.48	3.24	4.07
3	3.34	4.26	5.26	6.31

表 2.1  $(\ell, m)$  モードに対する係数  $A_{lm}$

のモード，つまり  $(0, 0)$  モードに対する  $Q$  値を図 2.7 に示す。図の右下方は計算の適用外であるので示されていない。図からわかるように  $S'$  型の損失はかなり大きく Fabry Perot 共振器の自由振動モードの 0 次近似とはなりえないから，図の  $S'$  型の  $(0, 0)$  モード，即ち完全な平面波共振の損失は，初期状態として完全な平面波共振が存在した時の単なる時間的減衰率をあらわすものと考えるべきである。図 2.8 には (2.64) によつて  $S$  型  $(0, 0)$  型モードの周波数変化を示した。 $S'$  型は自由振動モードとして 0 次近似にとることは適當ではないことが上で示されたので (2.67) は図示していない。図 2.9 には (2.63) によつて種々のモードに対する 1 トランジット当りの回折損失  $\delta d$  を Fresnel 数  $N$  に対して図示した。 $\delta d$  は Fox, Li 等によつて最初に用いられた量であつて，共振器の寸法，波長などの量がすべて一つのパラメタ  $N$  によつてあらわされる点，記述に便利である。同時に比較の為に Fox, Li のシミュレーションによる計算結果をも示している。Fox, Li の結果では  $N$  が小さいところでは図の直線は下方に曲つており， $N < 10$  ではそれがはつきりとあらわれてくる。上で求めた (2.63) 式では  $N$  の大きいところでの近似計算であるので図上では直線になる。

## § 7 考 察

### [A] Fox, Li との比較

本章の空洞理論の研究の行なわれた当時，回折損失としては Fox, Li がシミュレーションによつて求めた  $(0, 0)$  および  $(1, 0)$  モードの  $N=20$  までの数値結果と大きい  $N$  に対するその外挿式が知られているのみであつた。 $(0, 0)$  モードに対し比較を行なえば

$$\delta d = 0.207 N^{-1.4} \quad (\text{Fox, Li の外挿式}) \quad (2.69)$$

$$\delta d = 0.138 N^{-1.5} \quad ((2.68) \text{ による }) \quad (2.70)$$

となる。Fox, Li の得たモードのパタンもこゝで 0 次近似としている  $S$  型の固有函数のそれに大体近いものであるが，Fox, Li の見出したパタンには細かいリツプルがあらわれている。空洞理論ではそれらのリツプルまでを求めることは困難であるが，第 5 章においては完全な定式化である励振理論の一つの応用としてそれらのパタンを詳細に再現する。

### [B] 他の解析結果との比較

空洞理論の研究結果が発表された項には各国においても相次いで Fabry Perot 共振器

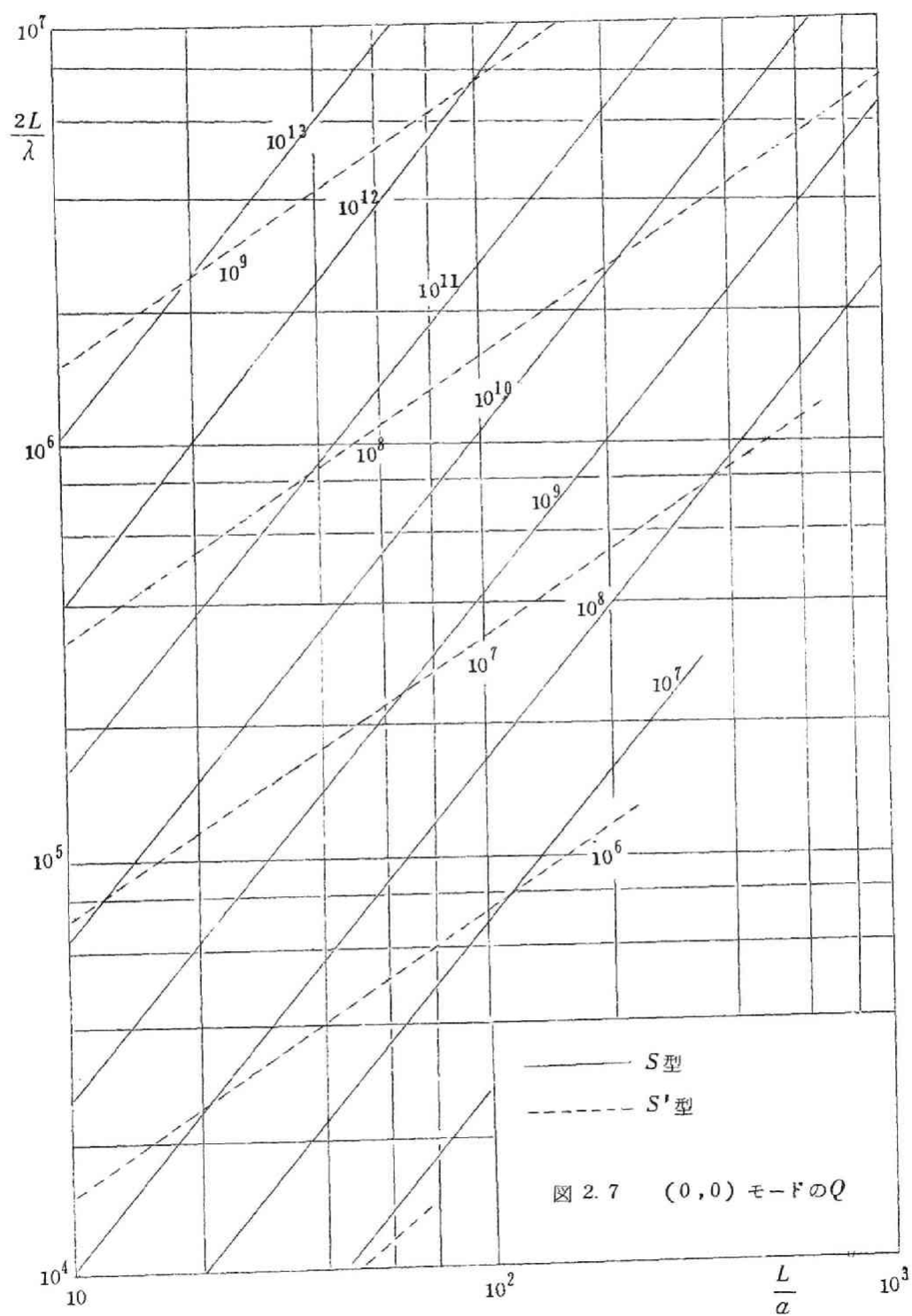
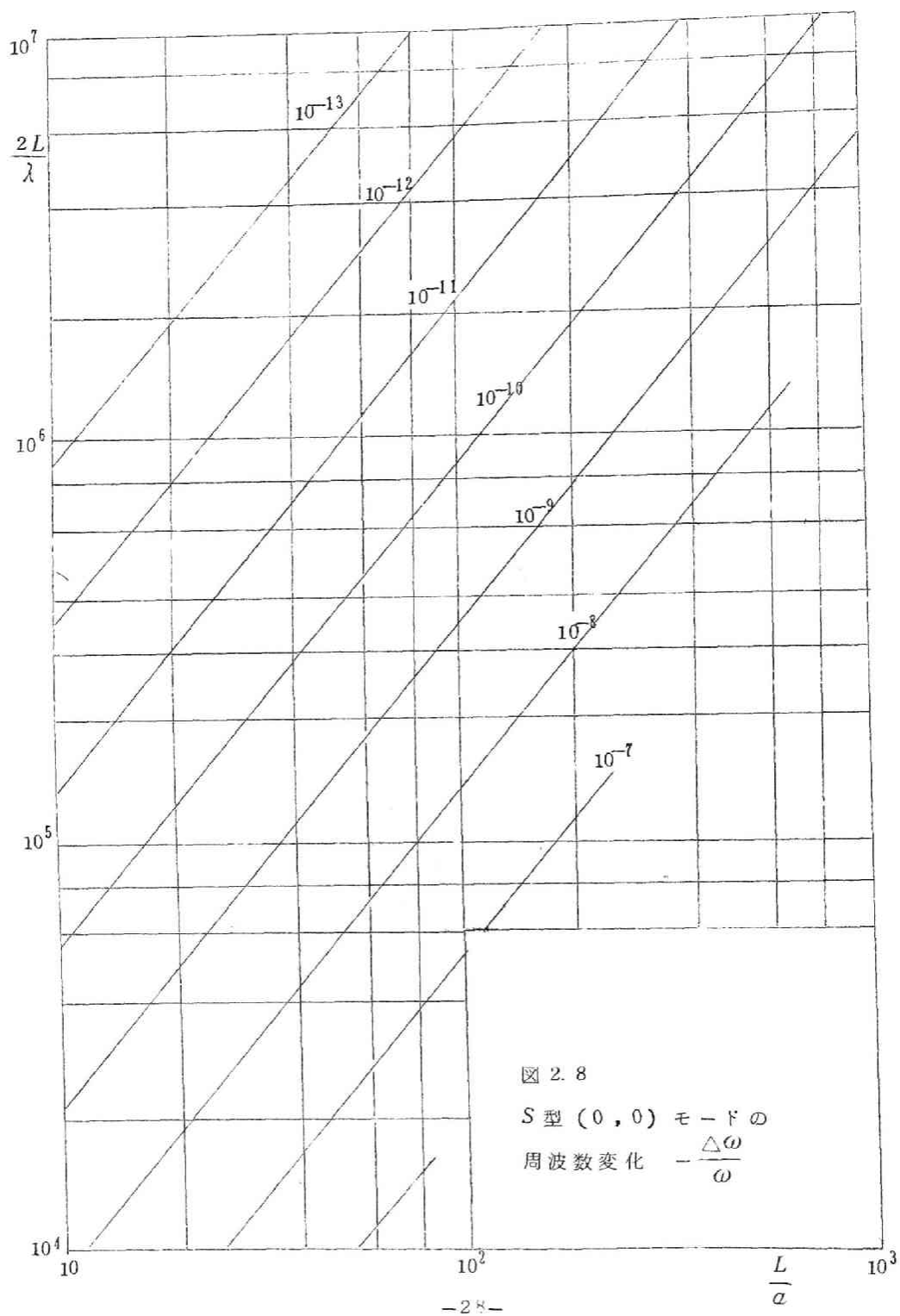
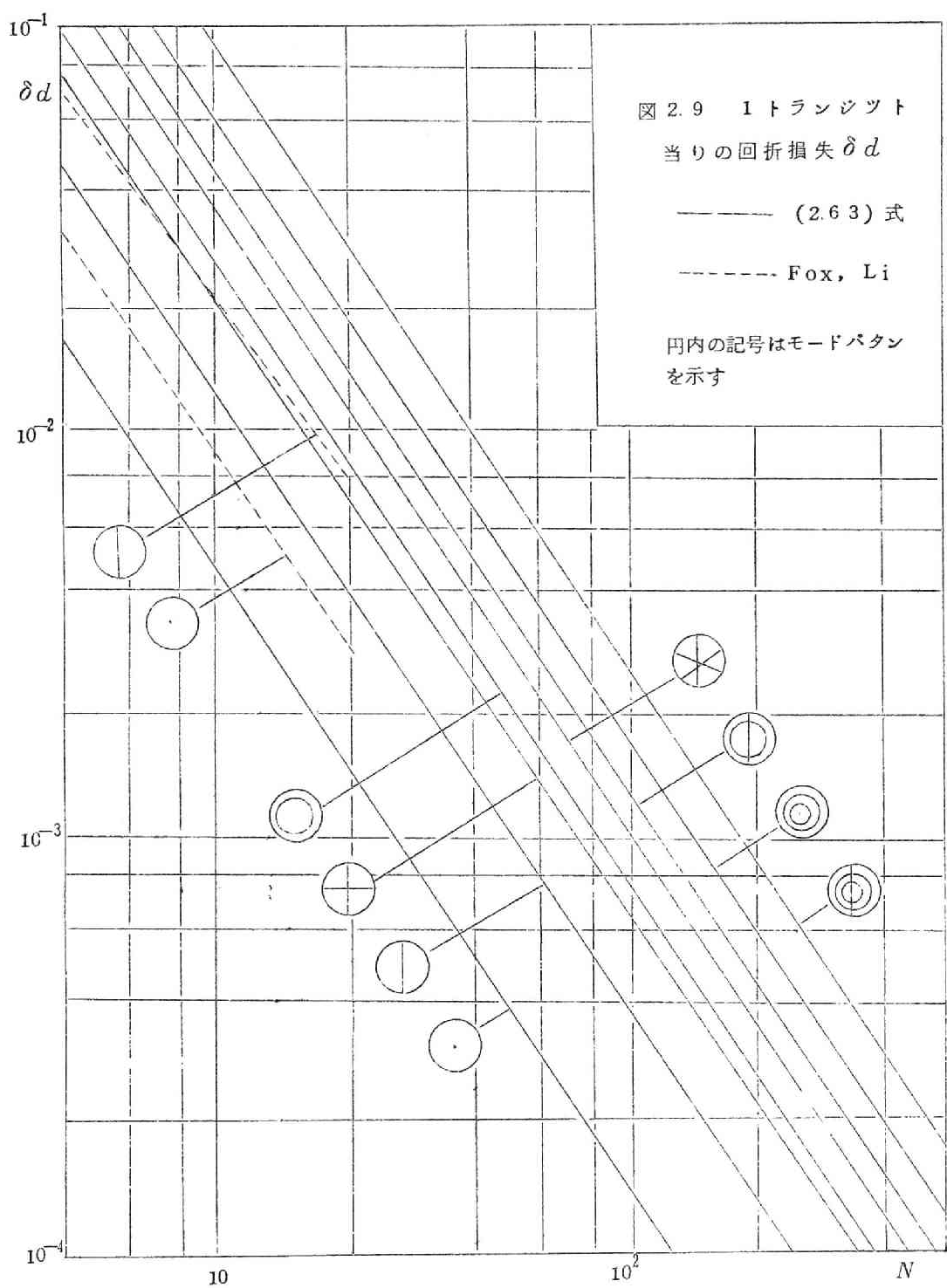


図 2.7 (0,0) モードの  $Q$







の解析の結果が発表された。 $N$ の大きいところでのそれらの結果を以下に示す。

$$\delta d = 2.40 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{空胴理論}) \quad (2.63)$$

$$\delta d = 5.23 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{Vainshtein})^{46)} \quad (2.71)$$

$$\delta d = 4.78 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{Risken})^{47)} \quad (2.72)$$

$$\delta d = 2.39 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{Bergstein, Schachter})^{38)} \quad (2.73)$$

$$\delta d = 5.20 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{第5章 励振理論による}) \quad (2.74)$$

(2.74) は後に第5章において求める (5.19) 式である。これらはすべて異なった定式化によつて求められたものであるが比例常数の差を除き定性的には一致している。Fox, Li のものと最もよく一致するのはVainshteinによる (2.71) あるいは後に求める(2.74) である。Bergstein, Schachter は周波数変化として平面波共振周波数よりのずれ

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \omega_{lm} \simeq -\frac{A_{lm}^2}{4\pi L} N^{-1} \quad (2.75)$$

を与えているが、これは閉じた空胴の  $S$  型の固有函数に対応する固有周波数を与える (2.40) から導びくことが出来るものである。この事実は  $S$  型の固有函数がよい0次近似であることの一つの裏付けになつてゐる。

### [C] 応 用

Fox, Li 等による干渉計理論では定式化を他種の問題に応じて修正あるいは変形することが困難である。たとえば共振器の媒質の屈折率が1より大きい場合、共振器の励振、変調、媒質の非線型性、線路との結合など実在の共振器において問題になることに対して適用することが出来ない。それらの問題のあるものに対しては空胴理論による取扱いが可能である。空胴理論の応用としては次のものが考えられる。i) 鏡面での透過率を与えて外部  $Q$  を正確に計算すること。ii) 鏡面が円形以外の形、たとえば矩形の場合を取扱うこと。iii) 上のべたように共振器内の媒質の屈折率が1より大きい場合。iv) 鏡面に変形歪がある場合。変形が波長に比して小さい場合には容易に取扱うことが出来る。v) 媒質の常数が時間的に変化する内部変調の問題、媒質の非線型性の問題、励振電流のある場合等の取扱い。励振問題の取扱いでは周波数は共振周波数近傍にかぎることが必要である。周波数が大きく変化すると開口面での境界条件は大きくかわり  $S$  型の固有函数 (2.37) は良い0次近似でなくなる可能性があるからである。次章では上のiv) でのべた鏡面変形の問題を空胴理論によつて取扱う。

## 第 3 章 変形した Fabry Perot 共振器

### § 1 反射鏡の微小変形

レーザー光の様な短波長用の共振器としての Fabry Perot 共振器においては、鏡面の仕上り精度ならびに調整の精度は波長以下であることが当然要求される。しかしながら現実の共振系には必ずその様な鏡面の歪、調整誤差、あるいは媒質の不均一性などによって生じた等価な鏡面歪が伴っており、実際レーザーの発振は Fabry Perot 共振器の調整に微妙に依存する。したがって理想的な状態にない Fabry Perot 共振器の諸特性、なかんずく回折損失を理論的に研究することは非常に重要であり早くから注目されてきたことである。それにも拘らず理論的な研究がはかどらなかつたのは Fabry Perot 共振器が理想的な状態にある時でさえ解析が困難であつたからである。干渉計理論においてはその初期に既に鏡面変形を鏡面の散乱行列の変化としてとらえ、それを用いて共振条件を記述する  $p$ -表示の積分方程式を解こうとする方法が提案されていた<sup>26)</sup>。しかしその研究者の行なつた逐近似の方法は正当ではなく、又摂動計算を行なうことにも種々の問題点があり結局解を求めることには成功しなかつた。鏡面の微小変形は、入射波が垂直入射する平面波に近いと考えられる場合には、波の反射の際に変形に対応する位相分布を付加することと近似的に等価である。このことを利用しても干渉計理論の基礎方程式を解析的に解くことは困難であるが、Fox, Li は高速計算機に以前行なつたと同様なシミュレーションを行なわせて無限長平面ストリップの傾斜変形に対する数値解析を行なつた<sup>52)</sup>。計算の性質上これを遂行することは困難な仕事であり、又結果が数値解析であるために、種々のモード、変形、Fresnel 数に対する解の一般的振舞いは明らかではない。

前章においては空胴共振像に基づいて Fabry Perot 共振器の解析を行なつたが、そこで明らかにされた如く  $S$  型の空胴共振像は他の種々の共振像、すなわち干渉計像、導波管共振像等と同じ様に平行平面間の Fabry Perot 共振をよく記述していると考えられる。しかしながら空胴共振像の利点は平行平面間の共振を簡単な像でとらえているので種々の応用が可能である。その一つがこの章において取扱われる反射鏡面の微小変形の問題である。実際は前章で研究された空胴理論は干渉計理論によつて論じられている自由振動の理論に取つて替わるべきものとして考案され研究されたものではなく、研究の当初から鏡面変形の問題を取り扱い

うるような理論として模索されたものである。従つて空洞理論の主題は本章でのべる変形した共振器の解析にあるのであつて、その取扱いも前章の方法の自然な拡張によつて行なわれる。前章においては回折損失  $\delta d$  を (2.4.3) の様な開口面  $S$  における表面積分としての輻射摂動行列  $I$  の対角要素の虚部として求めた。更に鏡面に微小変形が存在する場合、この種の問題は空洞理論では摂動法を用いて容易に取扱うことが出来る。すなわち鏡面変形による摂動  $H$  が存在する場合には  $(\omega_\nu^2) + H$  を対角化する様な表示で輻射摂動行列  $I$  の対角要素を求める、と云う様に問題を設定し直すことが出来る。但しこゝで  $(\omega_\nu^2)$  は閉じた空洞の固有函数 (2.3) に対応する固有値  $\omega_\nu^2$  で作られた対角行列を意味するものとする。上の問題設定の内容を云いかえるならば、それは閉じたしかも変形した空洞の  $S$  型の固有函数によつて開口面における輻射の摂動行列  $I$  の対角要素を求めるということであり、本章の取扱いの本質的な意味は前章におけるそれと同じ内容である。

以上の考えに基づいて次の様な順序で定式化ならびに計算を進める。まず前章の運動方程式 (2.5) に対するものを鏡面変形のある場合について書く。こゝでは前章の結果に従い開口面では  $S$  型境界条件をもつ固有函数を採用するが、更に鏡面上での境界条件は  $S$  型のみならず  $S'$  型の場合も同時に採り上げて議論を平行して進める。それは鏡面上の境界条件の型が鏡面変形の摂動、ひいては回折損失に変化を与える可能性があるからである。無限次連立運動方程式において開口面の摂動項をおとしたものは閉じたしかも変形した空洞の固有振動を定めるべき連立方程式とみなせるが、この解としての固有ベクトルは、変形の摂動が小さいものとすれば摂動論の結果を使えば容易に書下すことが出来る。この結果を用いて開口面での表面積分たる輻射摂動行列の対角要素を書きあらわし、それを摂動級数に分解するならば、それは一般に変形していない時の空洞の固有函数による開口面の輻射摂動行列の非対角要素もあらわれることがわかる。従つて変形していない時の空洞の固有函数による変形の摂動行列  $H$  と輻射の摂動行列  $I$  とを計算するならば問題は解決されることになる。§ 3 においては行列  $I$  を、§ 4 においては行列  $H$  の要素を傾斜変形、ならびに球面変形に対して具体的に計算する。§ 5 においてはそれらの行列要素の計算結果を用いて鏡面変形のある場合の回折損失を書きあらわす。その時傾斜変形の効果は変形の 2 乗であらわれること、および、傾斜変形によつて  $l=1$  のモードの縮退がとれることが示される。球面変形の場合には変形の符号も含めて 1 次の項であらわされる。§ 6 ではそれらの級数和の形で与えられた各モードの損失を計算機によつて数値的に求め、結果を Fresnel 数  $N$ 、変形パラメタ  $K$  の簡単な代数式として与え、その式の係数を各モードに対し表にまとめて示す。これらの結果によつて平行平面 Fabry Perot 共振器は傾斜変

形に対しては非常に敏感で、ごくわずかな変形によつても回折損失が著しく増加することが示され、一方球面変形の場合にはそれほど影響をうけないことが示される。§ 7 においては種々の考察を行ない特に損失最小のモード地図および Fox, Li の数値計算との比較を与える。§ 8 においては § 2 において用いた閉じたしかも変形した空洞の固有函数を別の方法で導びき、§ 2 で用いている固有値問題の摂動論の直接の結果と比較する。この節は § 2 で述べられるべきものであるが、この章の論旨を明瞭にする為最終節として独立させた。

## § 2 運動方程式と摂動

前章の結果に従い、開口面  $S$  において  $S$  型の境界条件 (2.3) を満足する固有函数系  $\{u_\nu\}$  による表示を基礎にとる。鏡面上の境界条件としては前章では  $S$  型のもものを取扱つたが、こ

こでは  $S$  型と  $S'$  型の両方を同時に取扱い、議論を平行に進めてゆく。変形

後の領域  $V'$  における固有函数系  $\{u_\nu\}$  の Fourier 係数の運動方程式は (2.5) に対応して

$$\frac{d^2}{dt^2} A_\nu + \omega_\nu^2 A_\nu - \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial n} U_\nu d\sigma + \int_S U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS = 0 \quad (3.1)$$

( $\sigma$  上  $S$  型境界)

$$\frac{d^2}{dt^2} A_\nu + \omega_\nu^2 A_\nu + \int_\sigma U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} d\sigma + \int_S U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS = 0 \quad (3.2)$$

( $\sigma$  上  $S'$  型境界)

但し

$$A_\nu = \int_{V'} U \cdot u_\nu dV, \quad U = \sum A_\nu u_\nu \quad (3.3)$$

であり、(3.1)、(3.2) に対してはそれぞれ

$$U(\sigma) = 0, \quad u_\nu(\sigma_0) = 0 \quad (\sigma \text{ 上 } S \text{ 型}) \quad (3.4)$$

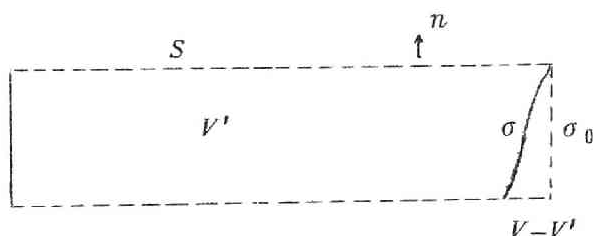


図 3.1 変形した Fabry Perot 共振器

$$\frac{\partial U(\sigma)}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_\nu(\sigma_0)}{\partial n} = 0 \quad (\sigma \text{ 上 } S' \text{ 型}) \quad (3.5)$$

なる  $U, \{u_\nu\}$  を考えるものとする。 $n$  は外向き法線である。(3.1) あるいは (3.2) の第3項, 第4項がそれぞれ鏡面変形および開口面  $S$  よりの輻射による2つの摂動項  $H$  および  $I$  に対応している。

前節でのべたことにより,  $(\omega_\nu^2) + H$  を対角化する様な表示で  $I$  の行列要素を求める。そのために先に  $I=0$  の場合を考える。変形は  $\sigma_0$  から内部に向つて図 3.1 の  $\sigma$  の様に与えられたとする。これは  $\{u_\nu\}$  が  $V$  の外部では定義されていないからである。しかし変形が微小であれば, この特殊性は不用で,  $\sigma_0$  は変形  $\sigma$  の平均の位置にあるとすることも出来る。それは  $\sigma$  の平均のずれは単に共振周波数のみを変化させるだけであることより,  $u_\nu$  を  $\sigma_0$  の外側に外挿して定義していることと結果に差を生じないからである。変形  $\sigma$  による  $S$  面の変化は無視する。

(3.1) (3.2) は  $U$  の展開 (3.3) が項別微分を許す範囲内で, 次の様にまとめられる。但し  $I=0$  としている。

$$\frac{d^2}{dt^2} A_\nu + \omega_\nu^2 A_\nu + \sum H_{\mu\nu} A_\mu = 0 \quad (3.6)$$

但し

$$H_{\mu\nu} = - \int_\sigma \frac{\partial u_\mu}{\partial n} u_\nu d\sigma \simeq \int_{V-V'} \nabla u_\nu^* \cdot \nabla u_\mu dV \quad (\sigma \text{ 上 } S \text{ 型}) \quad (3.7)$$

$$H_{\mu\nu} = \int_\sigma u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial n} d\sigma \simeq \omega_\nu^2 \int_{V-V'} u_\mu u_\nu dV \quad (\sigma \text{ 上 } S' \text{ 型}) \quad (3.8)$$

(3.7) (3.8) の右辺における近似式は附録 3.1 に導びかれるいる。

0 次近似 ( $H=0$ ) の固有函数を  $u_0$  と記し, 摂動  $H$  をうけた固有函数を  $U_0$  と記す。

(3.6) に対して直接に固有値問題の摂動論の結果<sup>79)</sup>を適用するならば

$$U_0 = u_0 + \sum_{\mu \neq 0} \frac{u_\mu H_{\mu 0}}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} + \sum_{\nu \neq 0} u_\nu \left\{ \sum_{\mu \neq 0} \frac{H_{\nu\mu} H_{\mu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)} - \frac{H_{\nu 0} H_{0 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)^2} \right\} \quad (3.9)$$

の様にあらわされる。こゝでは変形 $H$ に関し2次までの摂動項を示したが、傾斜変形の場合には1次の摂動項は消えるからである。(3.9)は縮退していない摂動論の結果である。 $\{u_\nu\}$ は実際縮退しているが§4でわかるように今の問題ではその間の摂動行列要素は0になるから(3.9)のまゝで差支えない。(3.9)は摂動論を(3.6)に適用した直接の結果であるが実さいに(3.9)が $\sigma$ 上で $S$ 型あるいは $S'$ 型の境界条件をどの程度満足しているかは保証されないから、境界条件の摂動を積極的に使用して(3.6)によらないで $U_0$ を求めることも出来る。その様にして導びく方法を§8において示し、結果を(3.9)と比較する。結果は(3.9)の第4項をのぞいて一致している。第4項は実際の計算において0になるので以下の計算では $U_0$ として(3.9)の形を用いて行なう。

開口面 $S$ よりの輻射による摂動 $I$ の(3.9)の表示による対角要素は(2.43)に対応し

$$\begin{aligned} J_{00} &= \iint_S \frac{\partial U_0(X)}{\partial n} G(X|X') \frac{\partial U_0(X')}{\partial n'} dS dS' \\ &= I_{00} + 2 \sum_{\mu \neq 0} \frac{I_{0\mu} H_{\mu 0}}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} - \sum_{\nu \neq 0} \frac{H_{\nu 0} \cdot H_{00} \cdot I_{\nu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} \\ &\quad + \sum_{\mu, \nu \neq 0} \frac{H_{\mu 0} H_{\nu 0} I_{\mu \nu}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} + 2 \sum_{\mu, \nu \neq 0} \frac{H_{\nu \mu} H_{\mu 0} I_{\nu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

但し

$$I_{\mu\nu} = \iint_S \frac{\partial u_\mu}{\partial n} G(X|X') \frac{\partial u_\nu}{\partial n'} dS dS' \quad (3.12)$$

の様にあらわされる。こゝで $J$ は $H$ について2次までとり、 $H$ は実行列、 $I$ は対称行列であることを用いた。第1項 $I_{00}$ は変形のない場合の項である。こゝでは輻射による損失に関しては1次の近似のみ、つまり対角要素のみとして取扱っている。 $I$ の2次の摂動は $H$ の2次の摂動の効果より小さい範囲で考えるものとするが、実際 $I$ の2次摂動の効果を評価すると、1次摂動の効果の1%以下であることが示される。

こゝでは変形による損失 $\delta d$ の変化のみに注目することにする。(2.19)(2.20)に対応して

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega_0^2} \text{Im}(J_{00}) \quad (3.13)$$

$$\delta d = \frac{n\pi}{Q} \simeq \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \text{Im}(J_{00}) \quad (3.14)$$



### § 3 $I$ の行列要素

(3.1 2) で定義される  $I$  の行列要素の対角要素は第 2 章 (2.4 3) (2.5 7) によつて求められた。非対角要素も (2.3 3) (2.3 7) を用いて第 2 章 § 4 において行なつたと全く同様に計算することが出来る。固有函数  $u_\nu$  の量子数  $\nu \equiv (\ell, m, n)$  の同じ  $\ell$  に属する固有函数は 2 重に縮退していて (2.3 7) の様に角部分に  $\cos \ell \theta$  をもつものと  $\sin \ell \theta$  をもつものがある。前者を +, 後者を - の記号で区別する。今微小変形を考えており, しかもレーザー共振器の場合 (2.4 7) の様に量子数  $n$  は非常に大きい時には, 異なる  $n$  をもつ固有函数間の結合は小さいものと考えることが出来る。即ち摂動法の適用出来る範囲では (3.1 1) からわかる様に固有値の接近した固有函数の間の結合が優勢であり, しかも,  $m, \ell$  については速く収束するような事情しか許されないことから, たとえば  $n \rightarrow n+1$  への転移による固有値の変化は

$$\omega_0^2 - \omega_\nu^2 = \left(\frac{A \ell m}{a}\right)^2 - \left(\frac{A \ell' m'}{a}\right)^2 + (2n+1) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \quad (3.15)$$

となる。 $\ell - \ell', m - m'$  が小さいことを考えれば量子数  $\ell, m$  の変化による固有値の変化よりも量子数  $n$  の変化による固有値の変化が支配的に大きいことは明らかである。したがつて (3.1 1) の計算においては  $I_{\mu\nu}$  も  $H_{\mu\nu}$  も事実上  $n$  に関しては対角的であるとして計算することが許される。

行列  $I_{\mu\nu}$  の著しい性質としては, まず定義 (3.1 2) によつて (i)  $\mu, \nu$  に関し対称である。次に (3.1 2) を  $\theta$  で積分する時 (2.4 1) の角部分の関係から明かなように (ii)  $\ell$  に関して対角である, 即ち転移則  $\Delta \ell = 0$  をもつ。(iii) +, - に関して対角である, つまり  $\cos$  モードと  $\sin$  モードの結合がない。 $z$  部分の積分に関してはこゝでは  $\sigma$  上 2 種類の境界条件を考えているので, (2.4 2) の  $n = n'$  の場合に対応したものは

$$\begin{aligned} & \int_0^L dz \int_0^L dz' \cos k(z-z') \left\{ \begin{array}{l} \sin(\frac{n\pi z}{L}) \sin(\frac{n\pi z'}{L}) \\ \cos(\frac{n\pi z}{L}) \cos(\frac{n\pi z'}{L}) \end{array} \right\} \\ &= 2 \left\{ \begin{array}{l} (\frac{n\pi}{L})^2 \\ k^2 \end{array} \right\} \frac{1 - \cos(kL - n\pi)}{[k^2 - (\frac{n\pi}{L})^2]^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

である。こゝで  $\{ \}$  の中の上段は  $S$  型，下段は  $S'$  型に対応してとるものとする。従つて行列要素  $I_{\mu\nu}$  は (2.4 3) (2.4 5) に対応して

$$I_{\mu\nu} = \iint_S \frac{\partial u_\mu}{\partial r} G(x|x') \frac{\partial u_\nu}{\partial r'} dS dS' = i 4 A_{lm} A_{lm'} \frac{n\pi}{L^2} [I_0' + i I_0''] \quad (3.17)$$

$$I_0' + i I_0'' = \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^{-1} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \frac{1 - (-1)^n \cos(K \frac{L}{a})}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 - k^2\right]^2} H_l^{(0)}(A) J_l(A) dK \right. \quad (3.18)$$

と書ける。こゝで  $\mu, \nu$  は例えば  $\mu = (n, l, m, +)$   $\nu = (n, l, m', +)$  であつて他の非対角要素は 0 である。(3.18) の  $\{ \}$  の中は  $S$  型,  $S'$  型に対応しているが第 2 章 § 6 で行なつた計算から明らかな様にレーザー共振器の場合には  $n \gg 1$  であるために (3.18) の積分は  $K = \frac{n\pi a}{L}$  の極く近傍だけで十分速く収束する。従つてこの積分値は  $\sigma$  上の境界条件が  $S$  型,  $S'$  型を問わず同一であるとしてすることが許される。

以上のことから (3.18) は (2.4 5) の上段に，したがつて又 (2.5 7) に等しい。第 2 章の計算では Green 函数の周波数として  $\omega = \omega_\nu$  を用いたが今の場合には鏡面変形による  $U_0$  の固有値の変化があるので正確にはそれを考慮しなければならない。しかしながら (2.5 6) を導びいた時の様に積分値は  $\omega$  の正確な値には殆んど依存しないから (2.5 7) をそのまま利用することが許される。以上によつて 0 でない行列要素は

$$I_{\mu\nu} = 2.40 \times 10^{-2} (1+i) N^{-\frac{3}{2}} A_{lm} A_{lm'} \frac{n\pi}{L^2} \quad (3.19)$$

の様にあらわされる。最後の因子  $n\pi/L^2$  は  $\delta d$  を書くときに落ちる因子である。

## § 4 H の行列要素

### § 4.1 微小変形の摂動

§ 2 の一般論を円形平面の Fabry Perot 共振器に対し，一方の鏡が傾斜した場合と，球面変形している場合について適用する。 $m, l$  は  $0 \sim 10$  程度， $n$  は (2.4 7) の様な大きい数とする。前節で述べた様に  $n$  は固定して考える。

(3.7) によつて

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &\simeq \int_{V-V'} \left\{ \frac{\partial u_\mu}{\partial r} \frac{\partial u_\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\mu}{\partial \theta} \frac{\partial u_\nu}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\mu}{\partial z} \frac{\partial u_\nu}{\partial z} \right\} dV \\
&\simeq \int_{V-V'} \frac{\partial u_\mu}{\partial z} \frac{\partial u_\nu}{\partial z} r dr d\theta dz \\
&= \frac{1}{N_\mu N_\nu} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \int_{V-V'} J_l \left( \frac{Alm}{a} r \right) J_{l'} \left( \frac{Al'm'}{a} r \right) \begin{Bmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos l'\theta \\ \sin l'\theta \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} z \right) r dr d\theta dz \quad (3.20)
\end{aligned}$$

である。これは $\sigma$ 上 $S$ 型境界の場合であるが上にのべた様に $n$ は非常に大きいので、 $\omega_\nu^2 \simeq (n\pi/L)^2$ が云えることを考慮すると、(3.20)は $\sigma$ 上 $S'$ 型境界に対する(3.8)に等しい。前節において示された様に $I_{\mu\nu}$ は $\sigma$ 上の境界条件には関係せず、かつ $H_{\mu\nu}$ も関係しないことがわかったから変形のある場合にも回折損失は境界の種類に関係なく同じ結果が得られる。したがって以下においては $\sigma$ 上の境界条件は特に区別しないで取扱う。

## § 4.2 傾斜変形

最大傾斜の方向を $\varphi$ とし、鏡の傾斜の勾配を $D$ とすれば $\sigma$ は次式で書きあらわされる。

$$\sigma: z(r, \theta) = Dr \cos(\theta - \varphi) \quad (3.21)$$



こゝで前にのべたように $\sigma$ の平均変位は0とおいている。変形が波長に比して小さく上にのべたように $n$

図3.2 傾斜変形

を固定して考え得るときには、変位によつては他のモードとの結合は生じないで単に $H_{\mu\nu}$ の対角要素にのみ寄与するが、これは周波数の変化のみに寄与する。これははじめから $L$ をその様にずらしたことに等価であることが示されるので、傾斜変形の場合には $\sigma$ の平均変位は0とし $u_\mu, u_\nu$ は外挿して積分(3.20)を計算する。したがって

$$H_{\mu\nu} \simeq \frac{D}{N_\mu N_\nu} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos \ell \theta}{\sin \ell \theta} \right\} \left\{ \frac{\cos \ell' \theta}{\sin \ell' \theta} \right\} \cos(\theta - \varphi) d\theta \\ \times \int_0^a J_\ell \left(\frac{A_{lm}}{a} r\right) J_{\ell'} \left(\frac{A_{l'm'}}{a} r\right) r^2 dr \quad (3.22)$$

この  $\theta$  の積分から転移則  $\ell' = \ell \pm 1$  が得られる。積分値は附録 3.2 に与えられている。 $r$  に関する積分は附録 3.3 の等式 (A 3.7) によつて与えられる。積分計算の詳細は附録にのべる。

(3.11) の計算を行なう時、附録 3.4 で示されるように  $\varphi$  に関係するのは  $\ell = 1$  のモードのみである。こゝではまず  $\varphi = 0$  (移転  $+\rightarrow +$ ) の行列要素を書下す。 $\varphi = 0$  の場合には (A 3.4) (A 3.6) によつて行列要素が  $(+, +)$  又は  $(+, -)$  の間でとられるかに応じて  $\cos \varphi$  又は  $\sin \varphi$  が乗じられる。 $\varphi$  を変えることが出来るので  $(-, -)$  間の行列要素は一応考えない。

$\mu = (\ell', m', n, +)$   $\nu = (\ell, m, n, +)$  とし行列要素の添字は  $\ell$  を上に、 $m$  を下に付ける。 $\ell \geq 2$  に対しては行列要素は  $\ell' = \ell \pm 1$  に対してのみ 0 ではなく

$$H_{m', m}^{\ell', \ell} = \frac{D}{N_\mu N_\nu} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) a^3 \frac{2 A_{lm} A_{l'm'}}{[A_{lm}^2 - A_{l'm'}^2]^2} J_{\ell+1}(A_{lm}) J_{\ell'+1}(A_{l'm'}) \\ = 4 D \cdot \frac{a}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{A_{lm} A_{l'm'}}{[A_{lm}^2 - A_{l'm'}^2]^2} = (4\pi)^2 \frac{K}{\lambda L} \frac{A_{lm} A_{l'm'}}{[A_{lm}^2 - A_{l'm'}^2]^2} \\ (\ell' = \ell \pm 1) \quad (3.23)$$

で与えられる。但し

$$D \equiv K \frac{\lambda}{a} \quad (3.24)$$

とおいている。 $K$  は最大変形の波長  $\lambda$  に対する比である。 $\ell = 1$  に対しては  $H^{0,1}$  は (3.23) の 2 倍、 $H^{2,1}$  は (3.23) のまゝである。 $\ell = 0$  に対しては  $H^{1,0}$  のみであつて (3.23) の 2 倍で与えられる。

### § 4.3 球面変形

微小変形としているから球面変形は

$$\sigma: z = D r^2 \quad (3.25)$$

とあらわすことが出来る。 $D >$

0の時には $\sigma$ は外に凸となる。

§ 4.2と同様に常数変位は考慮

しないから $D < 0$ の時には

(3.20)の積分は $u_\mu, u_\nu$ を外側に挿して行なわれる。

(3.20)は(3.25)に対

して

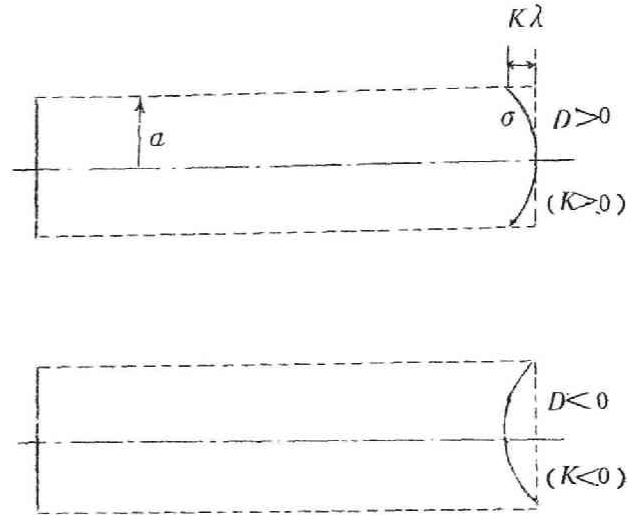


図3.3 球面変形

$$H_{\mu, \nu} = \frac{D}{N_\mu N_\nu} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos \ell \theta}{\sin \ell \theta} \right\} \left\{ \frac{\cos \ell' \theta}{\sin \ell' \theta} \right\} d\theta \int_0^a J_\ell \left( \frac{A_{lm}}{a} r \right) J_{\ell'} \left( \frac{A'_{lm'}}{a} r \right) r^3 dr \quad (3.26)$$

となるが $\theta$ 部分の積分から明らかなように変形が軸対称であるので $\ell = \ell'$ 以外の転移は禁止され、又+, -の間の転移も禁止される。 $\ell = \ell'$ の場合の $r$ 部分の積分は附録3.3(A 3.13)に与えられている。積分計算の詳細はそこで与える。

従つて0でない行列要素は

$$\begin{aligned} H_{m', m}^{\ell, \ell} &= \frac{D}{N_\mu N_\nu} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{2\pi}{\varepsilon_\ell} \frac{4 A_{lm} A_{lm'}}{[A_{lm}^2 - A_{lm'}^2]^2} J_{\ell+1}(A_{lm}) J_{\ell+1}(A_{lm'}) \\ &= 16 D \left( \frac{a^2}{L} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{A_{lm} A_{lm'}}{[A_{lm}^2 - A_{lm'}^2]^2} \\ &= (8\pi)^2 \frac{K}{\lambda L} \frac{A_{lm} A_{lm'}}{[A_{lm}^2 - A_{lm'}^2]^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

で与えられる。但し $K$ は変形距離の波長に対する比であつて次式で定義される。

$$D = \frac{K \lambda}{a^2} \quad (3.28)$$

## § 5 鏡面変形による損失の変化

### § 5.1 傾斜変形

損失 (3.14) を計算するために (3.11) に § 3, § 4 において求めた行列要素  $I, H$  を代入する。損失のみに注目する限り  $J_{00}$  の虚部はたがって  $I_{\mu\nu}$  の虚部のみが必要である。この節では便宜上  $\text{Im}(I_{\mu\nu})$  を単に  $I_{\mu\nu}$  と書くことにする。

(3.23) で与えられる傾斜変形の摂動行列  $H_{\mu\nu}$  は  $\ell$  に関し転移則  $\Delta\ell = \pm 1$  をもち、又 (3.17) で与えられる輻射の摂動行列  $I_{\mu\nu}$  は転移則  $\Delta\ell = 0$  をもつ。したがって (3.11) の第2項即ち変形  $H$  に関し1次の項は0となる。 $H$  に関し2次の項のうち (3.11) の第3項で与えられる部分も同じ理由で0となる。結局、傾斜変形による損失の増加は変形に関し1次の項があらわれないから、変形の2乗に比例することがわかる。(3.11) の第1項は変形のない時の回折損失に対応し既に第2章で求めたものである。これに対応する損失を  $\delta d^0$  と記し、変形による増加部分を  $\delta d'$  とする。 $\delta d'$  を (3.11) の第4項、第5項に対応する損失  $\delta d'', \delta d'''$  の和としてあらわせば

$$\delta d' = \delta d'' + \delta d''' \quad (3.29)$$

$$\delta d'' = \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{\mu, \nu \neq 0} \frac{H_{\mu 0} H_{\nu 0} I_{\mu \nu}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} \quad (3.30)$$

$$\delta d''' = 2 \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{\mu, \nu \neq 0} \frac{H_{\nu \mu} H_{\mu 0} I_{\nu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} \quad (3.31)$$

無摂動状態0を  $(\ell, M, n, +)$  によつて指定する。和にあらわれる中間状態では+, -の双方にわたつて和をとらねばならない。したがって一般に  $\delta d'$  には  $\varphi$  依存性があらわれるが、附録3.4に示すようにこれは  $\ell = 1$  の場合のみあらわれる。

(3.30) (3.31) に (3.17) (3.23) を代入すれば  $\ell \geq 2$  に対して

$$\begin{aligned} \delta d'' &= \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{l'=l+1}^{\infty} \sum_{l-1}^{\infty} \frac{(H_{mm}^{l'l}) (H_{m'm}^{l'l}) (I_{mml'}^{l'l'}) a^4}{(A_{lm}^2 - A_{l'm}^2)(A_{lM}^2 - A_{l'm'}^2)} \\ &= 4(4\pi)^4 K^2 N^2 I_0' (N) A_{lm}^2 \sum_{l'=l+1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{l'm}^2}{(A_{lM}^2 - A_{l'm}^2)^3} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\delta d''' &= 2 \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{l'=l+1}^{l+1} \sum_{m \neq M} \frac{(H_{mm'}^{ll'}) (H_{m'M}^{l'l}) (I_{mM}^{ll}) \alpha^4}{(A_{lM}^2 - A_{l'm'}^2)(A_{lM}^2 - A_{lm}^2)} \\
&= 8(4\pi)^4 K^2 N^2 I'_0(N) A_{lM}^2 \\
&\quad \times \sum_{l'=l+1}^{l+1} \left[ \sum_{m'} \frac{A_{l'm'}^2}{(A_{lM}^2 - A_{l'm'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{A_{lm}^2}{(A_{l'm'}^2 - A_{lm}^2)^2 (A_{lM}^2 - A_{lm}^2)} \right] \quad (3.33)
\end{aligned}$$

但しこゝで  $I'_0(N)$  は (3.17) にあらわれる  $I'_0$  であつて (2.57) で与えられる。

$l=0$  の場合には中間状態の和は  $l'=l+1=1$  のみであつて，上と同様の計算によつて

$$\delta d'' = 8(4\pi)^4 K^2 N^2 I'_0(N) A_{0M}^2 \left[ \sum_{m=0} \frac{A_{1m}^2}{(A_{0M}^2 - A_{1m}^2)^3} \right]^2 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
\delta d''' &= 16(4\pi)^4 K^2 N^2 I'_0(N) A_{0M}^2 \\
&\quad \times \sum_{m'} \frac{A_{1m'}^2}{(A_{0M}^2 - A_{1m'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{A_{0m}^2}{(A_{1m'}^2 - A_{0m}^2)^2 (A_{0M}^2 - A_{0m}^2)} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$l=1$  の場合のみ特別であつて附録 3.4 に計算されているように結果が  $\varphi$  に関係する。これは附録 3.2 からわかるように中間状態にあらわれる  $+$ ， $-$  が，転移  $1 \rightarrow 0$  の場合に対等にあられないためである。 $\varphi$  依存性をあらわに示すならば，

$$\delta d'' = 4(4\pi)^4 K^2 N^2 I'_0(N) A_{1M}^2 \quad (3.36)$$

$$\times \left\{ (2 \cos^2 \varphi) \left[ \sum_m \frac{A_{0m}^2}{(A_{1M}^2 - A_{0m}^2)^3} \right]^2 + \left[ \sum_m \frac{A_{2m}^2}{(A_{1M}^2 - A_{2m}^2)^3} \right]^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\delta d''' &= 8(4\pi)^4 K^2 N^2 I'_0(N) A_{1M}^2 \\
&\quad \times \left\{ 2 \cos^2 \varphi \left[ \sum_{m'} \frac{A_{2m'}^2}{(A_{1M}^2 - A_{0m'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{A_{1m}^2}{(A_{0m'}^2 - A_{1m}^2)^2 (A_{1M}^2 - A_{1m}^2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m'} \frac{A_{2m'}^2}{(A_{1M}^2 - A_{2m'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{A_{1m}^2}{(A_{2m'}^2 - A_{1m}^2)^2 (A_{1M}^2 - A_{2m}^2)} \right\} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

この $\varphi$ 依存性は傾斜変形の最大傾斜の方向とモードの軸となす角に依存することをあらわし、又逆に云えば回転対称による縮退したモード $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ の定義の不定性に対応している。この縮退したモードを定義する軸は実際は輻射の摂動 $I$ を考慮する以前に変形による摂動 $H$ を取扱った時に決定されているべきものである。それがその時決定されなかつたのは(3.9)の下でのべたように、又 $H$ の行列要素(3.23)からもわかる様に $H$ が $\ell$ について対角要素をもたないために、2つの縮退したモードの間での摂動行列が0になり、変形による固有値の変化の1次の項が0になったからである。したがって縮退がとれるものならば、摂動の2次の固有値の変化をしらべなければならない。(3.9)に対応する固有値の2次の摂動は次式で与えられる<sup>79)</sup>。

$$\Delta \omega_0^2 = \sum_{\mu} \frac{H_{0\mu} H_{\mu 0}}{\omega_0^2 - \omega_{\mu}^2} \quad (3.38)$$

これを中間状態に+、-の両方について和をとるならば $\ell \neq 1$ の場合には $\varphi$ 依存性はあらわれないが、 $\ell = 1$ の場合には(3.36)と同様な形で $\cos^2 \varphi$ があらわれる。したがって、この不定性は固有値の停留値性によつて取除くことが出来る。即わち $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ である。上では無摂動状態は+モードとしたから、 $\varphi = 0$ は $\cos \theta$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ は $\sin \theta$ モードに対応する。この様にして $\ell = 1$ の場合は傾斜変形によつて縮退がとれる。従つて又(3.36)(3.37)において $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ とおいたものが $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ モードの回折損失に対応し、当然 $\sin \theta$ モードの方が回折損失が少ないことがわかる。 $\sin$ モードは鏡の傾斜方向に対し直角な方向に振中最大な方向をもっているから傾斜変形による摂動のうけ方が少なく、したがって回折損失も少なくなることは直観的にも予想できることである。

## § 5.2 球面変形

この場合には(3.27)によつて、 $I$ も $H$ も $\ell$ に関し対角であるから(3.11)において変形の1次の項即わち第2項は0でない。したがって変形の2次の項を無視し、この項のみを評価する。当然損失の変化は変形に比例し、しかも変形の正負、即わち球面の曲率の正負に応じた損失の変化も符号を変える。(3.17)(3.27)を(3.11)の第2項に代入すれば

$$\begin{aligned} \delta d' &= 2 \frac{\omega}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{\mu=0} \frac{H_{\mu 0} I_{0\mu}}{\omega_0^2 - \omega_{\mu}^2} \\ &= 8 \frac{K}{\lambda L} a^2 I'_0(N) \sum_{m \neq M} \frac{A_{Lm} A_{LM}}{A_{LM}^2 - A_{Lm}^2} \frac{A_{Lm} A_{LM}}{[A_{Lm}^2 - A_{LM}^2]^2} \end{aligned}$$



$$= -4.8 \times 10^{-2} K N^{-\frac{1}{2}} A_{lM}^2 \sum_{m \neq M} \frac{A_{lm}^2}{[A_{lm}^2 - A_{lM}^2]^3} \quad (3.39)$$

こゝで  $K$  は (3.28) で定義された変形の波長に対する比である。

## § 6 回折損失の数値計算

### § 6.1 傾斜変形

共振器の回折損失  $\delta d$  は変形による増加分も含めて

$$\delta d = A_{lm} N^{-\frac{3}{2}} + B_{lm} K^2 N^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

$$N \equiv \frac{a^2}{\lambda L} : \text{Fresnel 数}$$

$$K \equiv \frac{Da}{\lambda} : \text{変形パラメタ}$$

$a$ : 半径,  $L$ : 軸長,  $\lambda$ : 波長,  $D$ : 傾斜勾配

の形にまとめられる。 $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  はモード  $(l, m)$  に依存する数であつて、表 3.1 に示される。 $A_{lm}$  は変形のない時の損失  $\delta d^0$  に対応するもので既に第 2 章において求めたものであるが便宜上再び掲げる。 $B_{lm}$  は (3.32) ~ (3.37) の和を電子計算機 KDC-1 によつて求めたものである。和は十分速く収束することを確認している。Bessel 函数の根によつてあらわされたそれらの級数の和の数値を附録 3.5 にまとめて示す。

$m \backslash l$	0	1	2	3
0	0.138 4.83	0.352 3.45 4.42	0.633 4.75	0.977 5.65
1	0.731 2.77	1.18 1.91 3.95	1.70 3.36	2.29 3.86
2	1.80 2.60	2.48 1.56 3.83	3.24 2.95	4.07 3.27
3	3.34 2.54	4.26 1.43 3.80	5.26 2.78	6.31 2.99

表 3.1  $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  の数値

(上段  $A$ , 下段  $B$ , 又  $l=1$  では縮退がとれて  
 $B$  が分裂する。左下 sin モード, 右下 cos モード)

(3.40) を変形  $K$  をパラメタとして  $N$  に対しプロットしたものを図 3.4.1 ~ 図 3.4.4 に示す。各々量子数  $l$  が一定のモードについてまとめられている。図 3.5.1 ~ 図 3.5.3 は  $K$  に対してプロットしたものである。

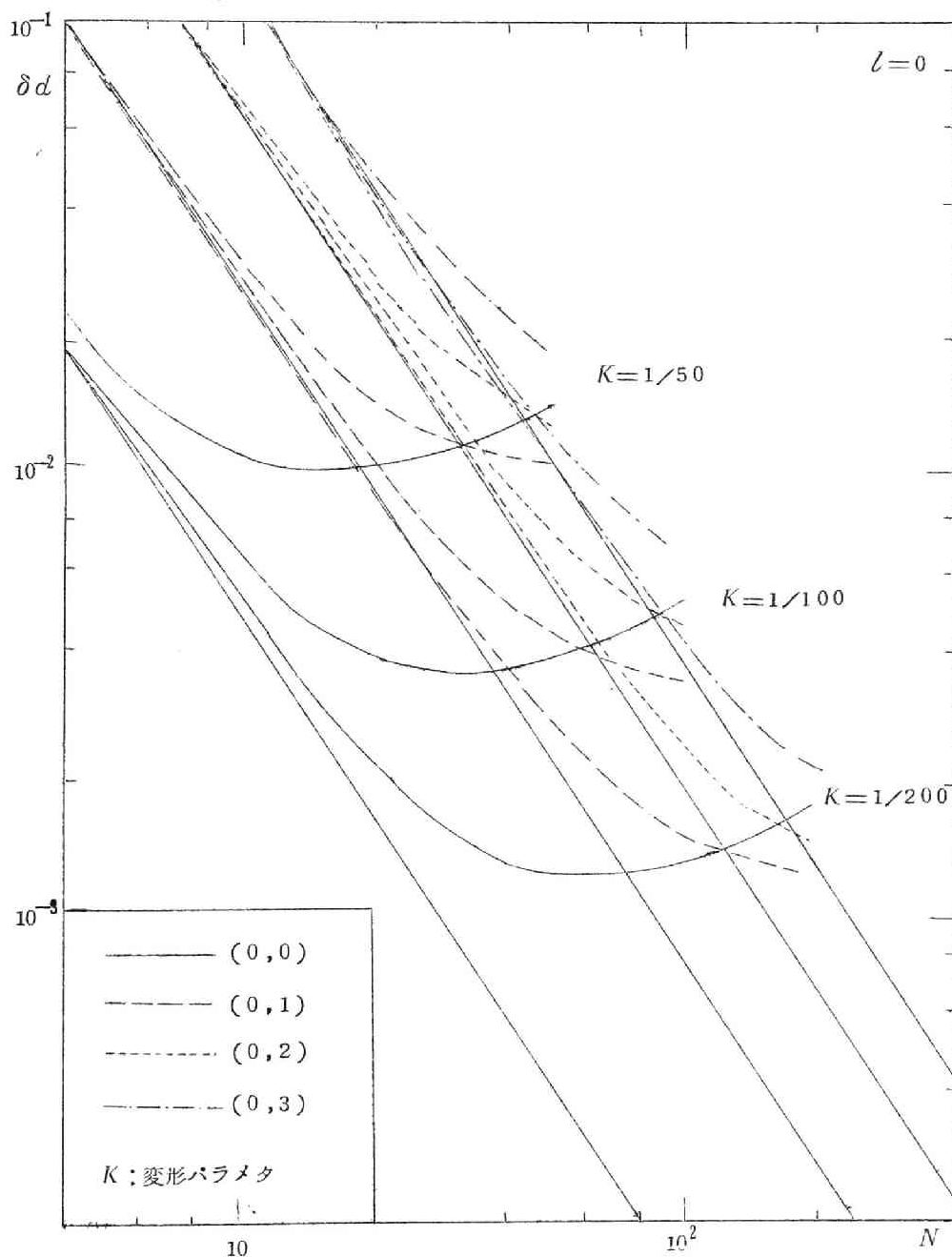


図 3.4.1 傾斜変形の場合の回折損失

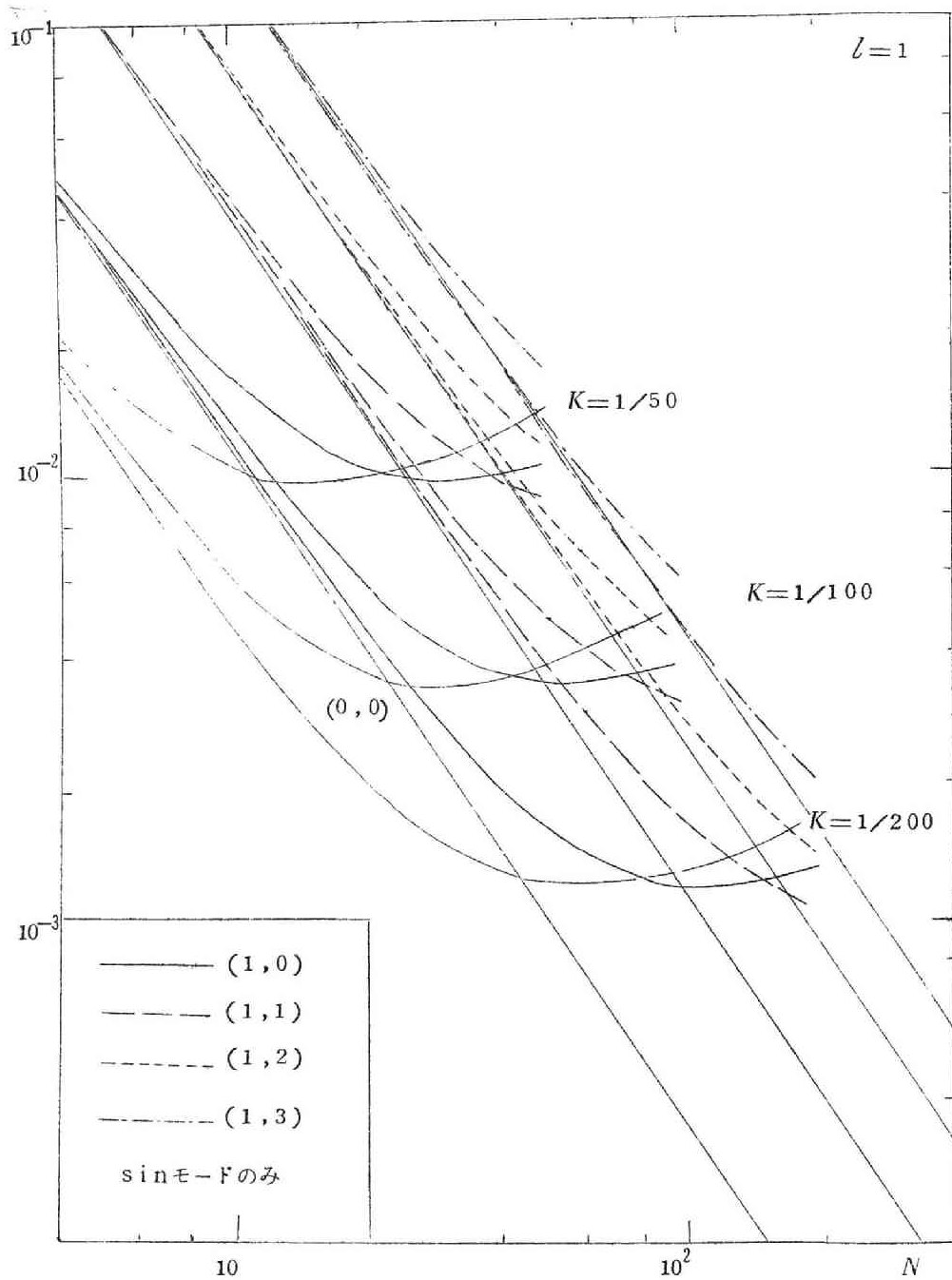


図 3.4.2 傾斜変形の場合の回折損失

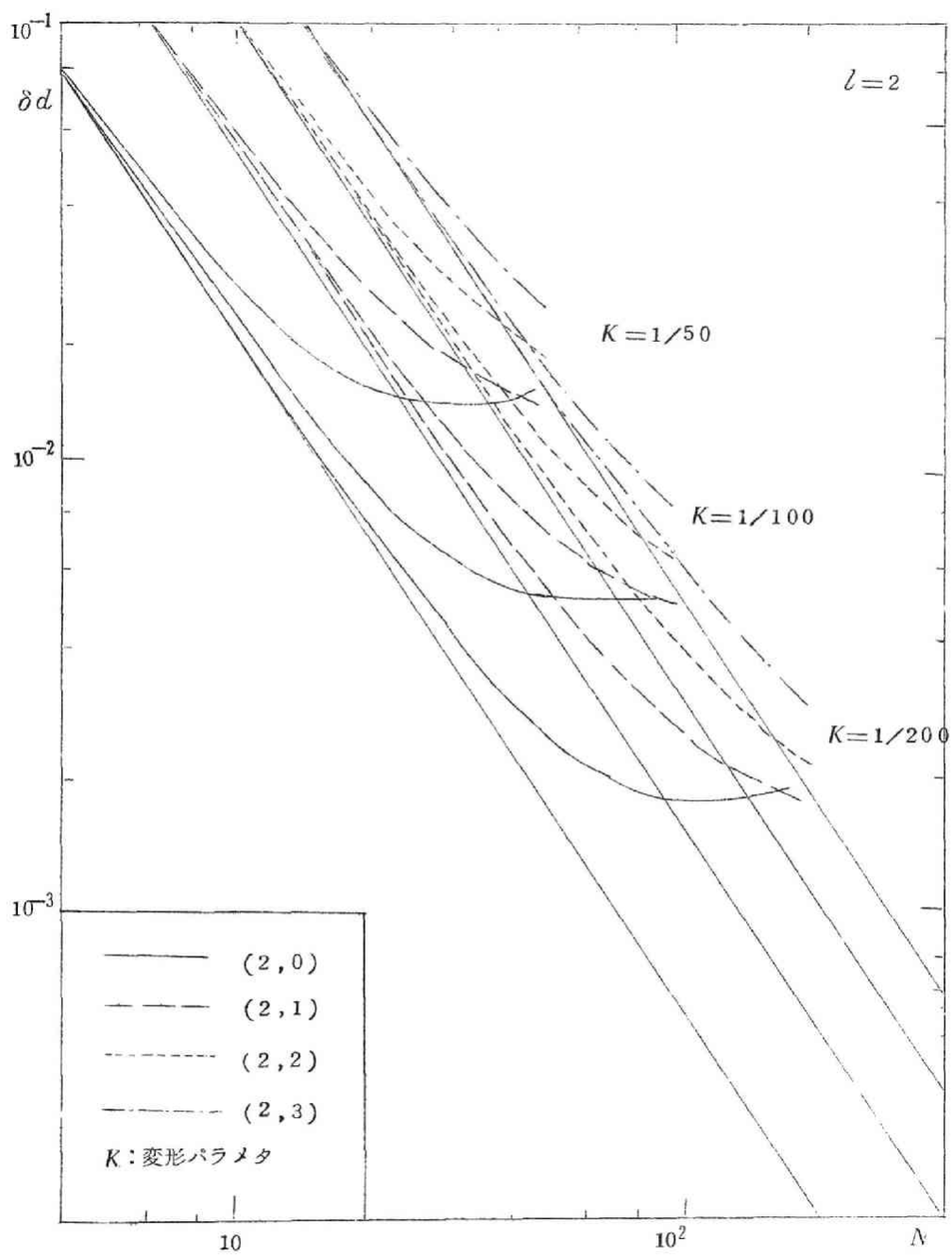


図 3.4.3 傾斜変形の場合の回折損失

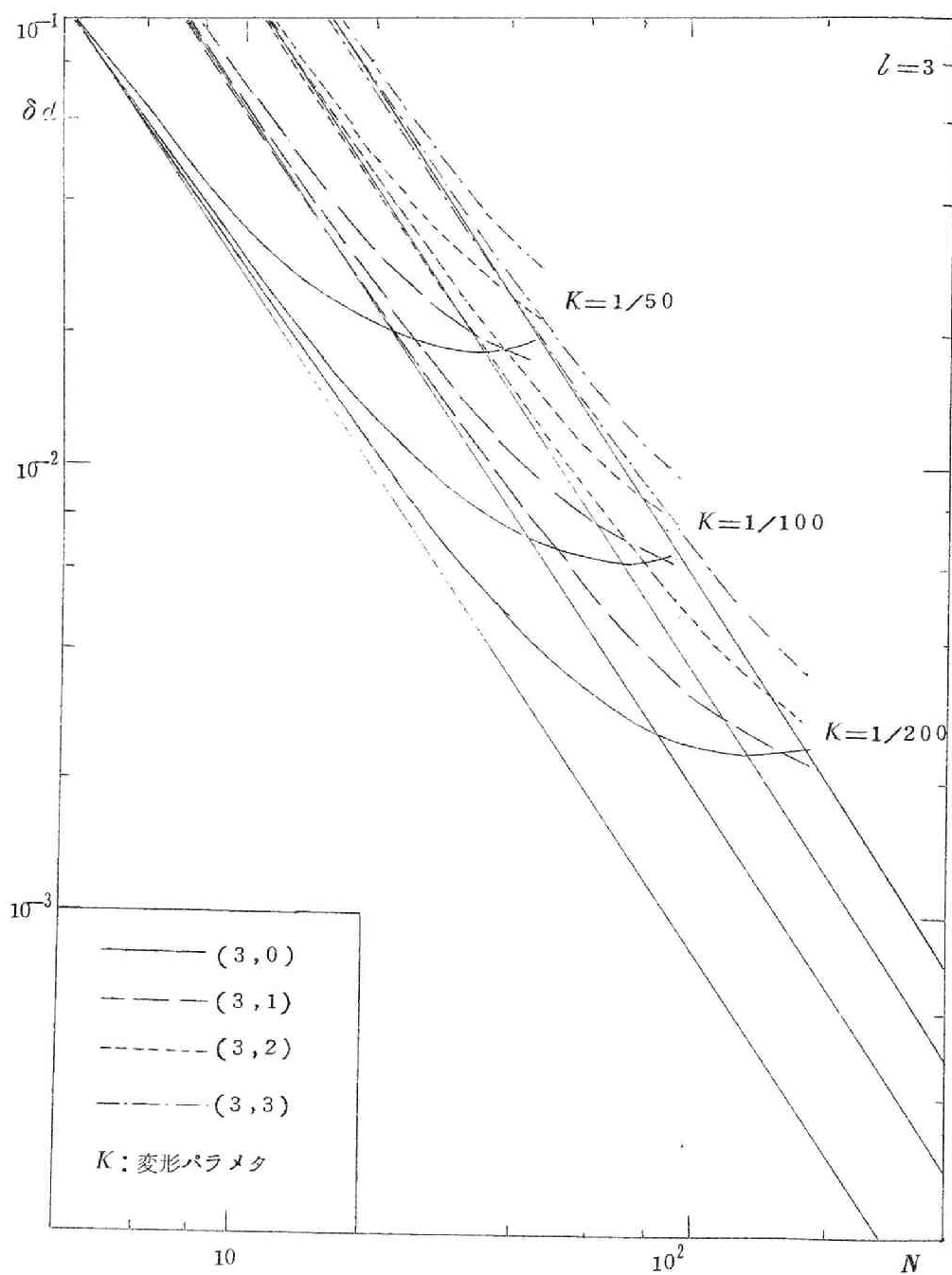


図 3.4.4 傾斜変形の場合の回折損失

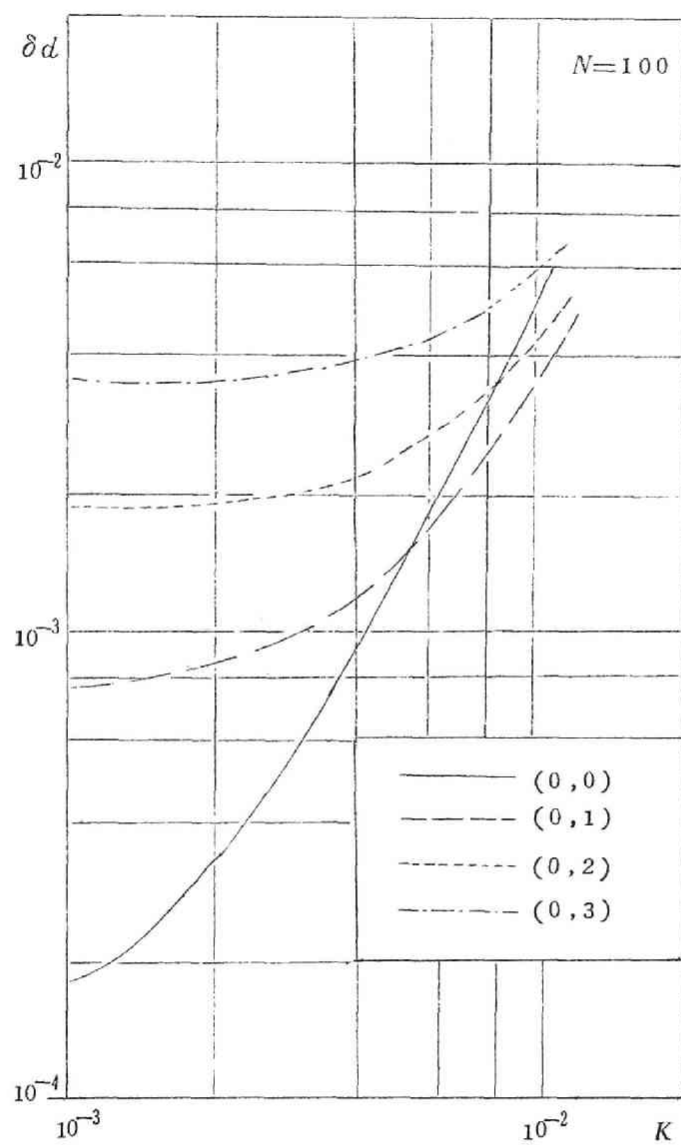


図3.5.1 傾斜変形に対する回折損失の変化

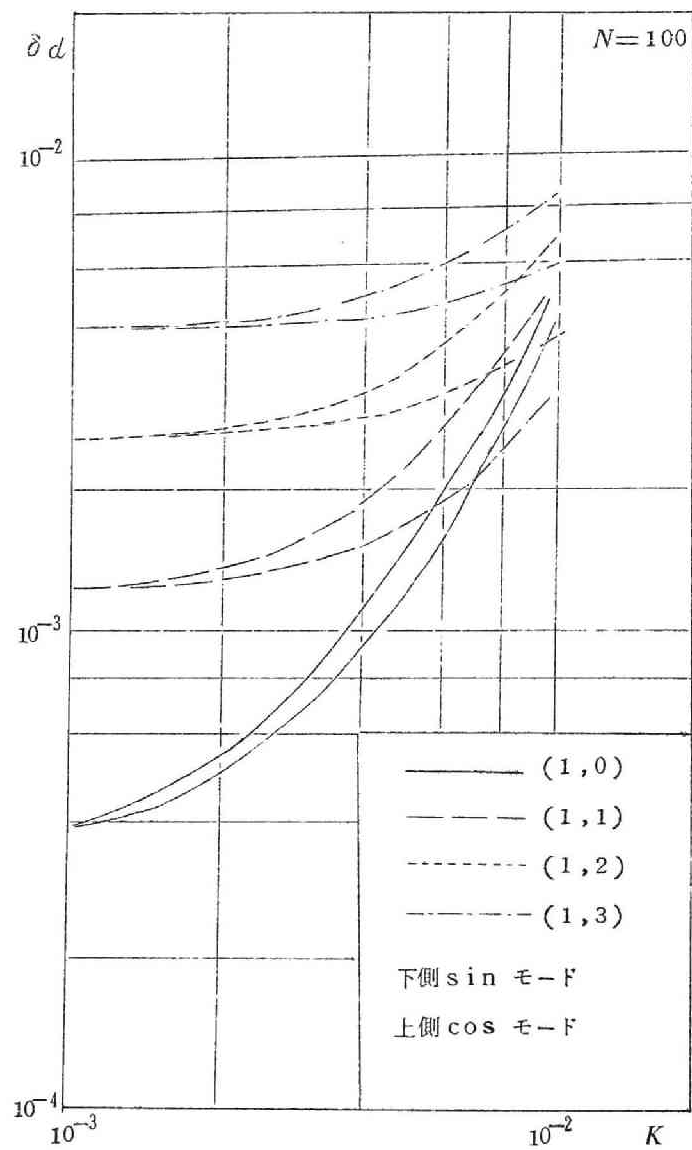


図 3.5.2 傾斜変形に対する回折損失の変化  
 ( $l=1$  モードの損失の傾斜変形  
 による分裂)

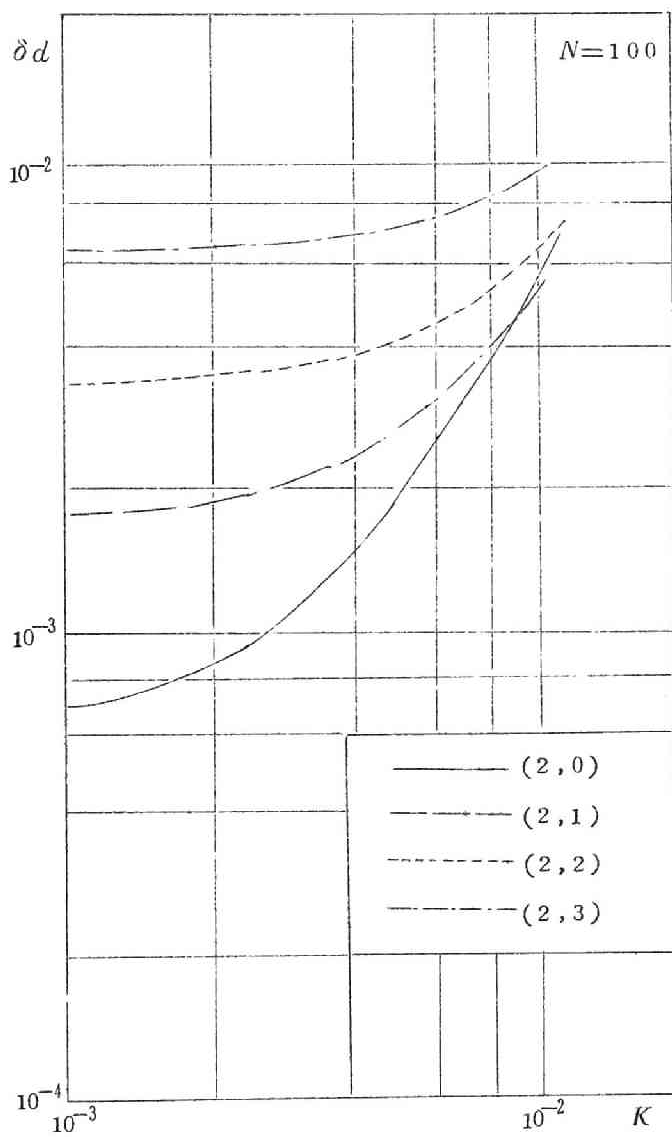


図 3.5.3 傾斜変形に対する回折損失の変化



## § 6.2 球面変形

この場合は (3.3 9) によつて回折損失は

$$\delta d = A_{lm} N^{-\frac{3}{2}} - C_{lm} K N^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4 1)$$

の形に書かれる。 $C_{lm}$  はモード  $(\ell, m)$  に依存する数であつて表 3.2 にその計算値を示す。

$m \backslash \ell$	0	1	2	3	4
0	$\times 10^{-4}$ 6.54	$\times 10^{-4}$ 9.99	$\times 10^{-3}$ 1.23	$\times 10^{-3}$ 1.39	$\times 10^{-3}$ 1.52
1	9.34	9.99	1.08	1.17	1.24
2	9.73	9.98	1.04	1.09	1.14
3	9.84	9.98	1.03	1.06	1.10

表 3.2  $C_{lm}$  の数値

この表から明らかなことは  $C_{lm}$  の値が殆んどモード  $(\ell, m)$  に依らず  $\times 10^{-3}$  の一定値をもっていることである。結果から判断すればこれは偶然ではなく物理的な理由があると考えられるが現在のところ明かではない。(3.4 1) は  $K < 0$  の場合つまり内側に凸の変形の場合には損失が増加することを示している。(3.4 1) を  $(0, 0)$  モード,  $(0, 1)$  モードに対して第 2 項即ち変形により変化する付加損失  $\delta d'$  のみを描いたものが図 3.6 である。球面変形に対してはたとい  $K = 1/10$  であつてもこの変化分は (3.4 1) の第 1 項の 10% 程度である。したがつて球面変形は傾斜変形ほど敏感には損失に寄与しない。又逆に言えば鏡のわずかな凹変形によつては損失を著しく減少させることは出来ないことをも意味している。よく使用される共焦点球面の場合には  $K = N$  が成立し摂動法の適用範囲をはるかに越えており比較することは出来ない。球面変形に対する回折損失の解析は現在のところこの方法によるものが唯一のものであり, (3.4 1) と比較するものは得られていない。

## § 7 考 察

### [A] $\delta d$ の表式の適用範囲

変形のある場合の回折損失の表式 (3.4 0) あるいは (3.4 1) は変形パラメタ  $K$  に関する

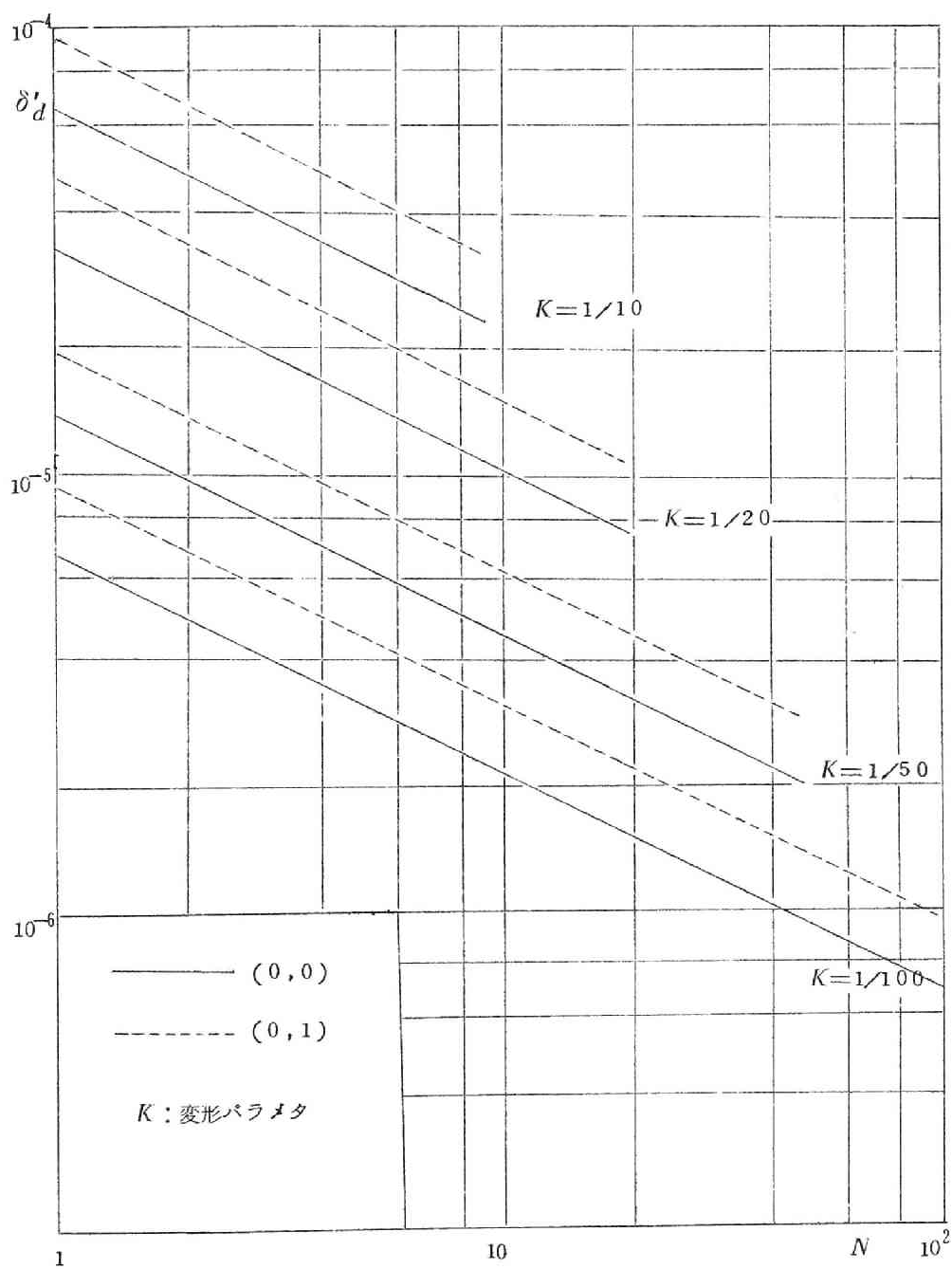


図 3.6 球面変形による回折損失の変化分  $\delta'd$

巾展開の形で与えられているが、Fresnel 数  $N$  も変形項にあらわれているからどの範囲の  $K$  および  $N$  の値に対して成立するかを評価する必要がある。そのためには  $\delta d$  の近似式につづくべき次の補正項を評価しなければならない。 $\delta d$  はこゝでは (3.14) によつて  $J$  の対角行列要素  $J_{00}$  の虚部として与えており、したがつて当然  $I$  に関しては 1 次であり、又 (3.11) の表式では  $H$  に関して 2 次までの展開が与えられている。 $J_{00}$  で与えられない補正項としては輻射による 2 次摂動項として  $I$  に関し 2 次のものが考えられるが、 $I$  は (3.19) で与えられるように  $N^{-\frac{2}{3}}$  に比例しており、したがつて十分大きい  $N$  に対しては  $I$  の 2 次の項は 1 次の項に対して考慮する必要はない。(3.11) で与えられる形の展開式において、変形の摂動行列  $H$  の具体的な形は傾斜変形の場合は (3.23) で、球面変形の場合は (3.27) で与えられるがいずれも  $K/\lambda L$  に比例し、したがつて (3.11) の摂動級数にあらわれる  $H/\omega_0^2 - \omega^2$  の因子は  $K a^2/\lambda L = KN$  に比例する。それ故 (3.11) において  $I$  に関してあらわれる因子  $N^{-\frac{2}{3}}$  をくり出すならば、この摂動級数は一般に  $KN$  の巾級数になつてゐる。傾斜変形のある場合の損失  $\delta d$  は一般に変形  $K$  の偶函数であることは容易にわかるから、(3.40) につづく第 3 項は  $N^{-\frac{2}{3}}(KN)^4 = K^4 N^{\frac{10}{3}}$  に比例する。第 2 項に対してこの項が無視出来るためには  $(KN)^2 \ll 1$  であることが必要であり、したがつて  $KN \ll 1$  が必要であるとなることが出来る。同様な理由によつて球面変形のある場合の損失  $\delta d$  の表式 (3.41) においても  $KN \ll 1$  であることが必要である。いずれの場合においても  $N$  は十分大きいことが必要なのは云うまでもない。

以上の考察から変形のある場合の損失の近似式 (3.40) (3.41) においては適用範囲は粗く云つて  $KN \ll 1$  内になければならない。したがつて図 3.4 ~ 図 3.6 などにおいては  $KN = 1$  の範囲までを示したが、 $KN = 1$  の近傍では  $\delta d$  の近似度はおちるものとみなすべきである。

## [B] 変形による $Q$ の低下

理論的には、理想的な平行平面鏡からなる Fabry Perot 共振器であれば、(2.62) (2.63) 又は図 2.7, 図 2.9 からみられる様に Fresnel 数  $N$  さえ大きくえらぶならばいくらでも  $Q$  の大きい、又は損失  $\delta d$  の小さい共振器をつくることが出来る。常識的にはそのように任意に高い  $Q$  をもつ共振系を構成することは実現困難であると思われるが、その困難さの理由の一つはこゝで取扱つた鏡面の変形である。予期したように傾斜変形が存在するとごく僅かな傾斜たとえば変形距離にして  $1/100$  波長程度であつても  $N$  が大きい場合には損失  $\delta d$  は無変形の場合の損失  $\delta d^0$  から大きくはずれてきて、いくらでも高い  $Q$  をもつような Fabry

Perot 共振器を実現することが非常に困難であるということが図 3.4 ないし図 3.5 からよく理解できる。また逆に言えば共振器の寸法や反射率が定められるならば、共振系を構成する際に許容される鏡面の平行度をこれらの結果を利用して見積ることが可能である。

### 〔C〕 損失最小モードの地図

鏡面の平行度の調整の仕方によつては、発振モードが変わることがあることが報告されている。発振が最小損失のモードで実現されていると考えられるから、平行度がわるくなるにつれて他のモードの損失が最小になるためであると推察される。平行円型平面鏡 Fabry Perot 共振器に対してはこのことは定量的に上記の解析結果によつて裏書きされる。一定の  $N$  つまり一定の共振器に対して傾斜が大きくなると損失も増大するが、それにつれて各モードの損失の大きさの順が入れかわる可能性がある。傾斜変形の場合の回折損失 (3.4 0) の適用範囲内において、ある  $N, K$  の値に対して最小の損失を与えるモードは決まる。図 3.4.1 又は図 3.4.2 を他の図と比較するとわかるように、変形が増大すると最低損失のモードは  $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$  と移行する。したがつて上の適用範囲内において  $N-K$  図上に損失最小モードに対する地図を描くことが出来る。これを損失最小モードの地図と呼ぶことにする。2つのモードに対して等しい損失  $\delta d$  を与えるような  $K, N$  は (3.4 0) によつて次の関係を満たすことがわかる：

$$KN = \sqrt{\frac{A_1 - A_2}{B_2 - B_1}} \quad (3.4 2)$$

但し

$$\begin{aligned} \delta d_1 &= A_1 N^{-\frac{3}{2}} + B_1 K^2 N^{\frac{1}{2}} \\ \delta d_2 &= A_2 N^{-\frac{3}{2}} + B_2 K^2 N^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。即ち地図の境界線は  $K-N$  図上で双曲線を描く。しかも異なる境界線は決して交わらないから、ある  $K_0, N_0$  でそのモードが損失最小であれば  $KN = K_0 N_0$  なる  $K, N$  に対しても常にそのモードが損失最小であることがわかる。図 3.7 はそのモード地図を (3.4 2) によつて対数グラフ上に示したものである。(3.4 2) の右辺の常数は表 3.1 から求められる。

$KN$  の値に対する損失最小モードの領域は

$$\begin{aligned} 0 < KN < 0.394 & \quad (0, 0) \text{ モード} \\ 0.394 < KN < 0.73 & \quad (1, 0) \text{ モード} \end{aligned}$$

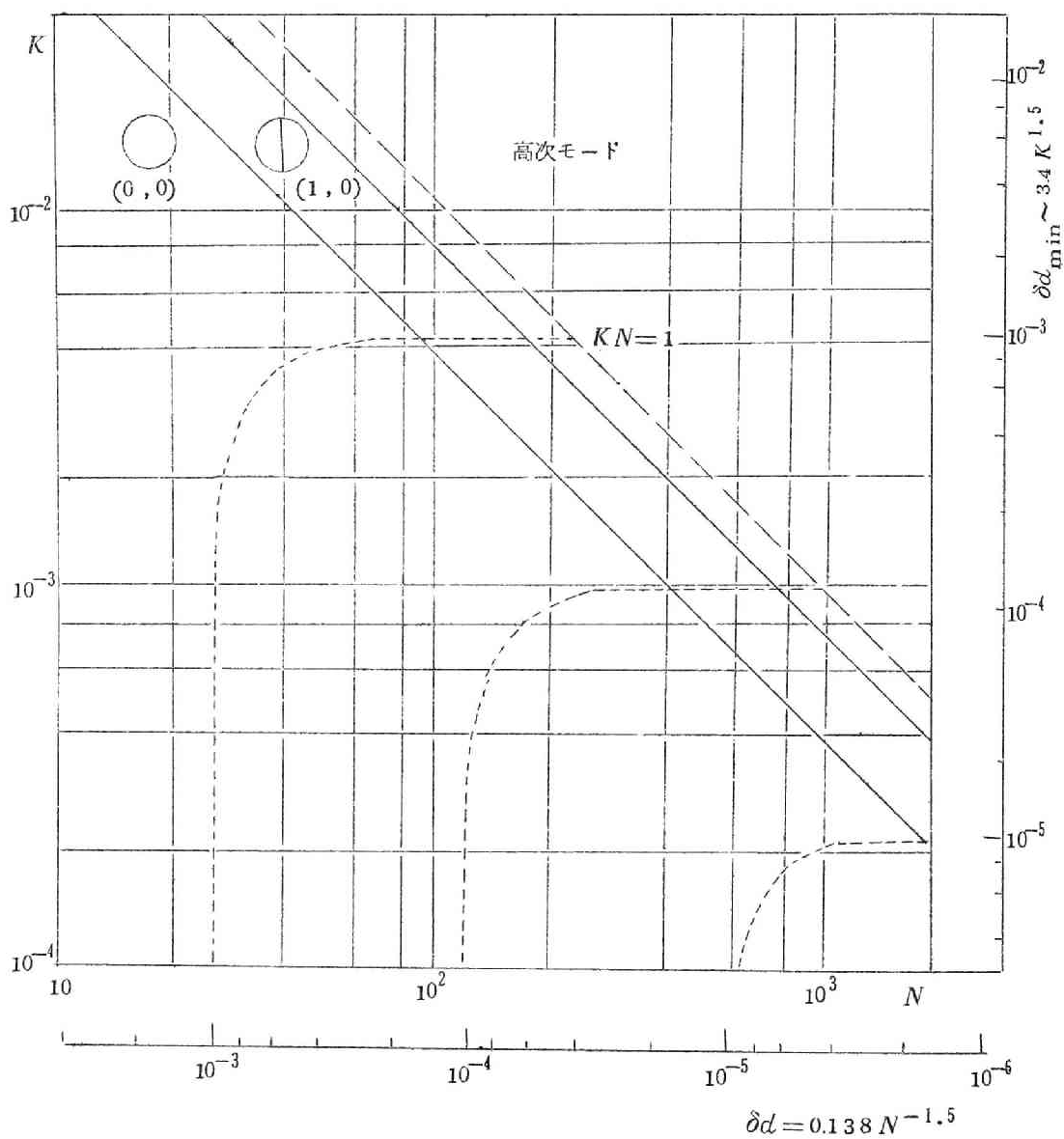


図 3.7 損失最小モードの地図

$$0.73 < KN < 1.9$$

{1, 1} モード

等となるが、この節のはじめにのべた (3.4 0) の適用範囲を考慮するならば  $KN < 1$  であることが必要であり、したがって上の領域は (1, 1) モード以上に対しては正確ではなくなる。 $KN > 1$  の領域では円筒座標に基づいたモードの結合ではよくあらわされえない複雑な状態であろうと相像される。又図 3.4.2 からわかるように一定の変形に対し、 $K$  の大きいところでは損失最小モードの損失は  $N$  の値にもモードにも依存せずほぼ一定である。これは図 3.4.2 で明らかな如くその近傍では  $\delta d$  が  $N$  に関し極小値をとっているからであり、又その値がモードに殆ど依存していないからである。その極小値を (3.4 0) によつて実際に計算してみると

$$\delta_{\min} = 4A^{\frac{1}{4}} \left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{3}{4}} K^{\frac{3}{2}} \quad (3.4 3)$$

となる。この  $K^{\frac{3}{2}}$  の前の常数因数を表 3.1 より求めれば (0, 0), (1, 0) モードに対しそれぞれ 3.4 6, 3.4 0, とほぼ一定となつている。損失最小モード地図、図 3.7 の右側に付した尺度は (3.4 3) を  $K$  に対して目盛つたものである。一方  $KN$  の値の小さい領域では (0, 0) モードが損失最小であるが、この時は当然損失は  $\delta d^0$  に等しく  $N$  のみの函数となる。図 3.7 の下側に付した尺度は  $\delta d^0$  を  $N$  に対して目盛つたものであり、モード地図上の点線はこれら 2 つの尺度をつなぐ等損失線を示したものである。このモード地図によつて共振器の寸法と平行度がわかれば発振モードの種類とその損失  $\delta d$  の値とを読むことが出来る。

#### [D] Fox, Li の数値計算との比較

入射波が平面波の垂直入射に近い場合の散乱では、鏡面の微小変形は対応する位相分布を鏡面上に付加することと近似的に等価である。§ 1 でのべたように Fox, Li はこのことを利用して無限長平面ストリツプ間の Fabry Perot 共振の傾斜変形に対する効果を計算機によるシミュレーションによつて取扱つた<sup>52)</sup>。彼等の無限長平面ストリツプに対する数値結果を正方形平面鏡に換算し直したものを図 3.8 に示し、同時に円形平行平面鏡の対応するモードに対する (3.4 0) の結果をも示した。共振器の形状に多少の差はあつても、損失の数値、傾向はかなりよく合っている。(3.4 0) は  $N \gg 1$  (例えば  $N > 5$ ) に対する近似であり、又  $\delta d$  もあまり大きくないことが必要である。Fox, Li の計算においては鏡面が双方とも変形しているので、(3.4 0) の  $K$  としては比較にさいし 2 倍したものととらねばならず、したがつて  $\delta d$  の増加分  $\delta d'$  は 4 倍して比較する必要がある。図 3.8 ではその点を考慮している。

図 3.9 では  $\delta d$  の変形による増加分  $\delta d'$  のみを円形の (0, 0) モードと方形の [0, 0]

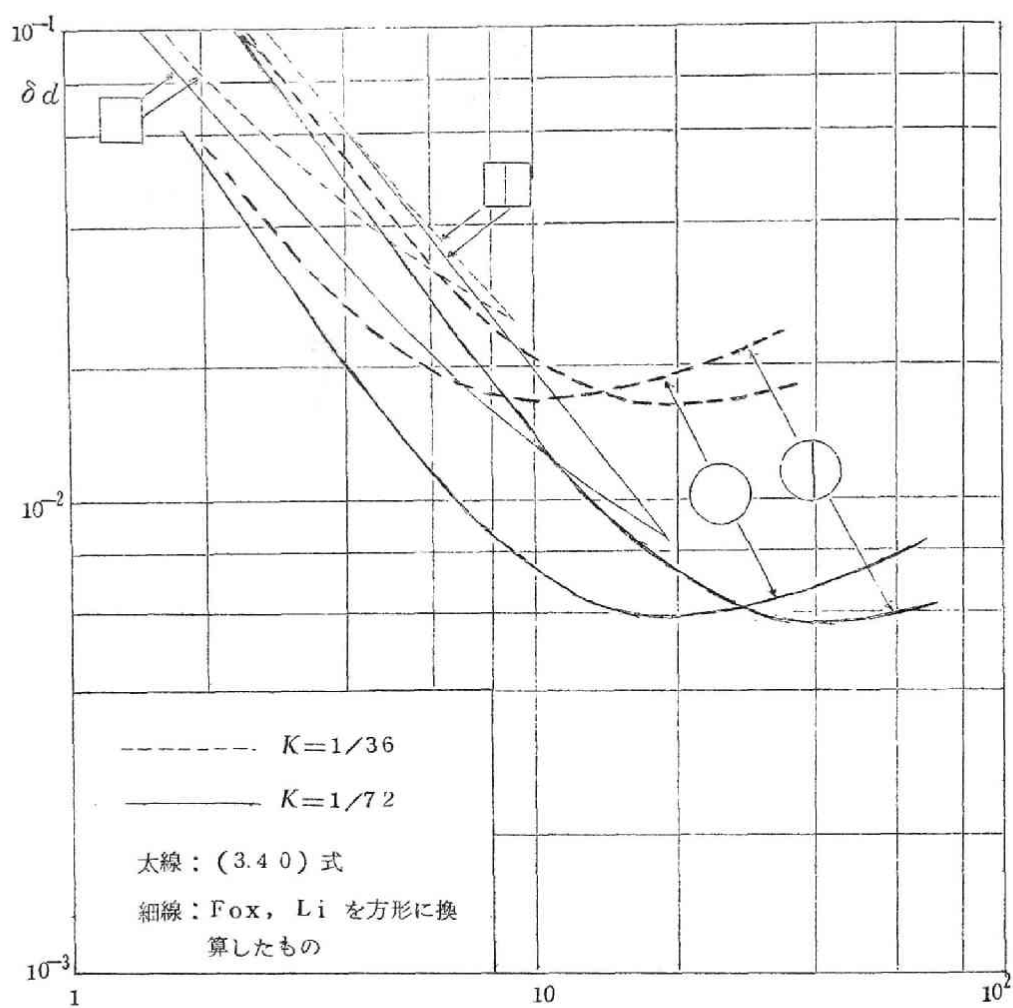


図 3.8 Fox, Li の無限長ストリップに対する  
 傾斜変形のシミュレーションとの比較

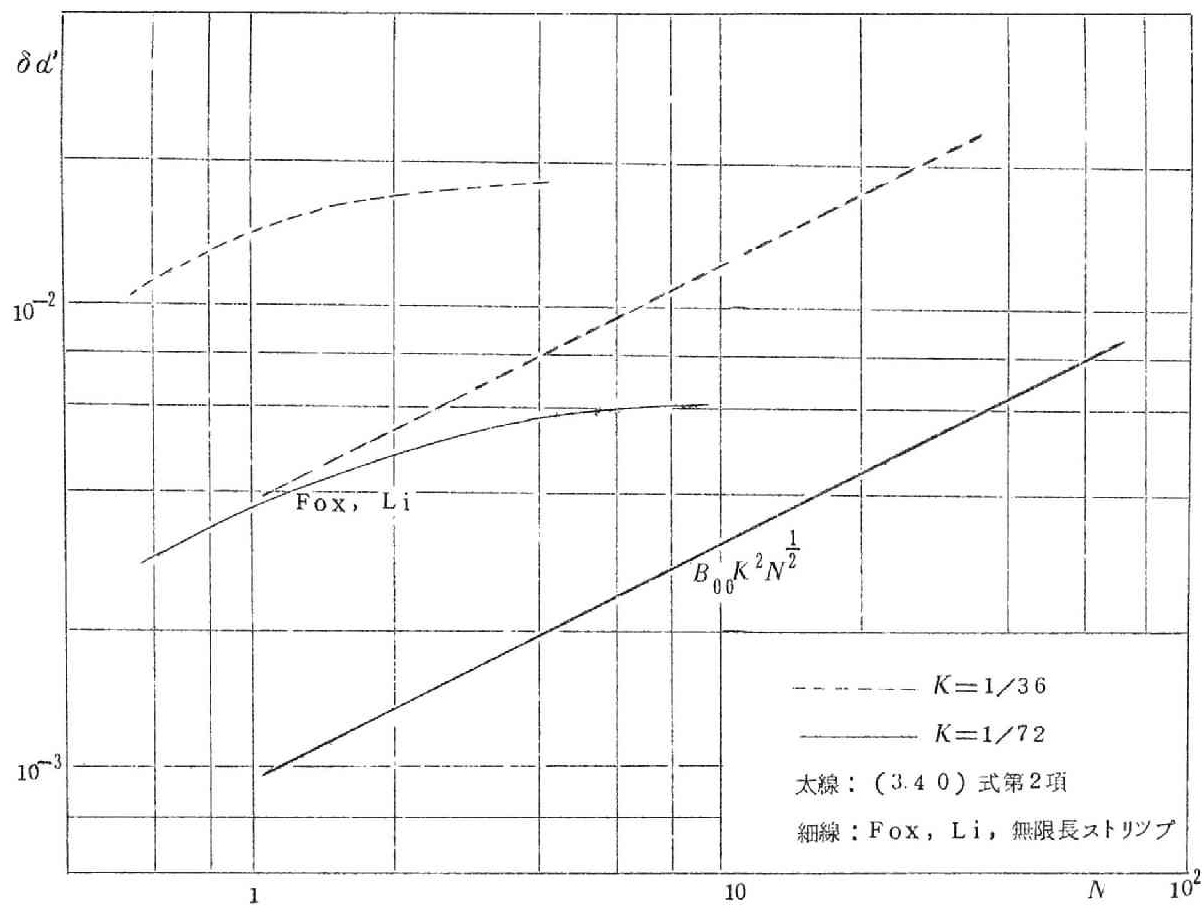


図 3.9 Fox Li の数値計算との傾斜変形による  
損失増加分  $\delta d'$  の比較



モードについて比較している。鑢の形状に円と方形の差異はあつても  $N$  に対する  $\partial d'$  の依存性即ち  $N^{\frac{1}{2}}$  に比例すること、および  $K$  に対する依存性即ち  $K^2$  に比例することとはよく合っている。 $N$  に対する依存性では Fox, Li の場合  $N$  の大きいところまでがついているが Fox, Li の計算では  $N$  の大きいところでは計算の信用度がおちると同時に、一方 (3.4 0) では  $KN < 1$  でなければならないから、同様に  $KN = 1$  に近いところで信用度がおちているための不一致であらうと考えられる。

球面変形に対する損失の式 (3.4 1) は現在のところ比較すべき他の結果は発表されていない。Fox, Li によるシミュレーションは  $[0, 0]$  と  $[1, 0]$  の形のモードに対して行なわれたが、これは各パラメタにつき各点毎に反復計算を行なうものである。これに対し、上に求めた (3.4 0), (3.4 1) は各モードについて  $N$  および  $K$  に対する依存性が簡単な形で代数式として与えられている点非常に有利であると考えられる。

## §8 境界条件の摂動の取扱いの別法

この節では §2 で用いた変形をうけた閉空洞の固有函数に対する近似式 (3.9) を別の方法によつて導びく。したがつて順序としては §2 でのべるべきものであるが、それ自身内容的に独立していること、および上記の Fabry Perot 共振器の理論としての論旨を明らかにするために本章の終節においた。

§2 (3.9) においては変形空洞即ち

ち境界条件の摂動をうけた空洞の固有函数を求めるに際し、(3.6) で与えられる固有値方程式に直接摂動論の結果を利用した。この考え方とは別に境界条件そのものの摂動から直接に摂動をうけた波動函数を近似的に導びくことは、しばしば導波管あるいは金属板による散乱の問題において取扱われている<sup>80)81)</sup>。今の場合にその様な方法を適用して得られる結果と上記の固有値問題の摂動論の結果とがどの様に一致するかを較べることは興味がある。なぜならば固有値問題の摂動論の展開形式は空洞内における自乗平均収束の意味でなされているのであり、境界値に対応した展開の函数値に対しては正確さが不明であるからである。

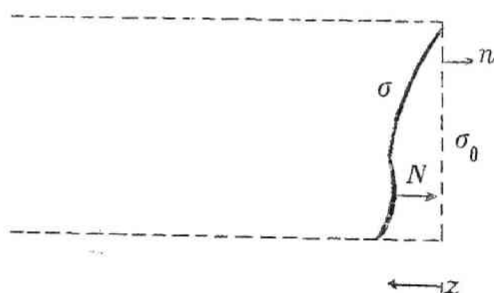


図 3.10 共振器の変形部分

先ず最初に  $\sigma$  上  $S'$  型境界の場合を取扱う。変形した鏡面  $\sigma$  を

$$\sigma: z - \varepsilon f(r, \theta) = 0 \quad (3.44)$$

によつて記述する。 $\varepsilon$  は微小変形をあらわすパラメタである。無摂動の波動関数を  $u_0$ ，摂動をうけたものを  $U_0$  と記す。境界条件 (3.5) に対応し

$$-\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad (\sigma_0 \text{ 上}) \quad (3.45)$$

$$-\frac{\partial U_0}{\partial n} = N \cdot \text{grad } U_0 = 0 \quad (\sigma \text{ 上}) \quad (3.46)$$

となる。こゝで  $N$  は  $\sigma$  に対する法線ベクトルであつてその成分は

$$N = - \frac{\text{grad } \sigma}{|\text{grad } \sigma|} = \frac{1}{N} (-1 + 0(\varepsilon^2), \varepsilon f_r + 0(\varepsilon^3), \varepsilon \frac{f\theta}{r} + 0(\varepsilon^3)) \quad (3.47)$$

$$N \equiv \sqrt{1 + \varepsilon^2 f_r^2 + \frac{\varepsilon^2 f\theta^2}{r^2}}, \quad \frac{1}{N} \sim 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (f_r^2 + \frac{f\theta^2}{r^2}) + \dots \dots \quad (3.48)$$

であらわされる。こゝに  $f$  の添字は  $f$  の偏微分係数をあらわし，又  $0(\varepsilon^2)$  などは微小量  $\varepsilon$  の次数に対応する項を意味する記号である。 $U_0$  を

$$U_0 = u_0 + \varepsilon U' + \varepsilon^2 U'' + \dots \dots \quad (3.49)$$

の様に領域  $V$  の中で展開し，更に各項を  $z=0$  の近傍では

$$u_0(r, \theta, z) = u_0(r, \theta, 0) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 u_0(r, \theta, 0)}{\partial z^2} + 0(z^4) \quad (3.50)$$

$$U'(r, \theta, z) = U'(r, \theta, 0) + z \frac{\partial U'(r, \theta, 0)}{\partial z} + \dots \dots$$

の様に展開する。 $U''$  等も同様である。上の  $u_0$  の展開では固有函数  $u_0$  が  $z$  の函数としては  $z=0$  に関し偶函数であることを用いている。(3.50) を (3.49) に代入し (3.44) を考慮して  $\varepsilon$  の昇巾順に整理すれば  $z=0$  の近傍では

$$\begin{aligned}
U_0(z) = & u_0(0) + \varepsilon U'(0) + \varepsilon^2 \left( U''(0) + f \frac{\partial U'(0)}{\partial z} + \frac{f^2 \partial^2 u_0}{2 \partial z^2} \right) \\
& + \varepsilon^3 \left( U'''(0) + f \frac{\partial U''}{\partial z} + \frac{f^2 \partial^2 U'}{2 \partial z^2} + \frac{f^3 \partial^3 U_0}{3! \partial z^3} \right) + \dots
\end{aligned} \quad (3.51)$$

となる。したがってこれから  $z = \varepsilon f$  における grad の各成分を計算すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0(r, \theta, \varepsilon f)}{\partial z} &= \varepsilon \left( \frac{\partial U'}{\partial z} + f \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial U''}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} + \frac{f^2 \partial^3 U_0}{2 \partial z^3} \right) \\
&+ \dots \\
\left. \begin{aligned}
\frac{\partial U_0(r, \theta, \varepsilon f)}{\partial r} &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial U'}{\partial r} + O(\varepsilon^2) \\
\frac{1}{r} \frac{\partial U_0(r, \theta, \varepsilon f)}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial U'}{\partial \theta} + O(\varepsilon^2) \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$u_0$  についての境界条件を用い (3.52) と (3.47) (3.48) によつてベクトルの直交条件 (3.46) を  $\varepsilon$  の 2 次までについて各巾に書けば,  $\varepsilon^0$  の項はあらわれず

$$\varepsilon^1 : -\left( \frac{\partial U'}{\partial z} + f \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) + f_r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} = 0 \quad (3.53)$$

$$\varepsilon^2 : -\left( \frac{\partial U''}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} \right) + f_r \frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial U'}{\partial \theta} = 0 \quad (3.54)$$

がえられる。 $\varepsilon^3$  以上は多少複雑になる。(3.53) は 1 次の摂動函数  $U'$  の  $\sigma_0$  上の即わち  $z=0$  上の値を  $u_0$  の項であらわしている。したがって空腔領域  $V$  に Green の定理を適用して空腔内の  $U'$  を求めることが出来る。考えている問題では空腔内部の Green 函数を用いることになるが, その時の周波数  $\omega$  には無摂動の場合の周波数  $\omega_0$  を使用する時, Green 函数の次の形の和からは  $\omega = \omega_0$  の項を取除いたものを使用しなければならない<sup>82)</sup>。即わち

$$G(x|x') = \sum_{\nu \neq 0} \frac{u_\nu(x) u_\nu(x')}{\omega_0^2 - \omega_\nu^2} \quad (3.55)$$

である。これは  $u_\nu$  と同じ境界条件をみたす Green 函数であるから (3.53) によつて直ちに

$$\begin{aligned}
U'(X) &= - \int_{\sigma_0} G(X|X') \frac{\partial U'}{\partial n} d\sigma = \sum_{\nu \neq 0} \frac{u_\nu(X)}{\omega_0^2 - \omega_\nu^2} \int_{\sigma_0} u_\nu(X') \frac{\partial U'(0)}{\partial z} d\sigma \\
&= \sum_{\nu \neq 0} \frac{u_\nu(X)}{\omega_0^2 - \omega_\nu^2} \int_{\sigma_0} u_\nu(X') \left\{ -f \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + f_r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right\} d\sigma
\end{aligned} \tag{3.56}$$

がえられる。これが (3.49) の第2項を与える。一方 (3.8) で定義された変形の行列要素のうち  $H_{\nu 0}$  は

$$\begin{aligned}
H_{\nu 0} &\equiv \int_{\sigma} u_\nu \frac{\partial u_0}{\partial n} d\sigma = \int_{\sigma} \varepsilon u_\nu \cdot N \operatorname{grad} u_0 d\sigma \\
&= \int_{\sigma_0} (u_\nu(0) + \varepsilon^2 f^2 \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial z^2} + \dots) \left\{ \varepsilon \left( -f \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + f_r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \left. + O(\varepsilon^3) \right\} d\sigma \\
&= \varepsilon \int_{\sigma_0} u_\nu \left\{ -f \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + f_r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right\} d\sigma + O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

と計算される。これを (3.9) の第2項，即ち1次摂動項

$$\sum_{\nu \neq 0} \frac{u_\nu H_{\nu 0}}{\omega_0^2 - \omega_\nu^2}$$

に代入したものと上の (3.56) を (3.49) の第2項に用いたものとを比較するならば，これらは  $O(\varepsilon^2)$  の項まで完全に一致することがわかる。即ち変形の1次の項までは二つの方法は一致している。

次に2次の項についてしらべる。(3.56) と (3.54) とから上と同様な手法によつて計算すると

$$\begin{aligned}
U''(X) &= - \int_{\sigma_0} G(X|X') \frac{\partial U''}{\partial n} d\sigma \\
&= \sum_{\mu \neq 0} \frac{u_\mu(X)}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \int_{\sigma_0} u_\mu(X') \left\{ -f \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} + f_r \frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial U'}{\partial \theta} \right\} d\sigma
\end{aligned}$$

ここで上に求めた (3.56) あるいはその積分のところに (3.57) を用いたものを利用して

書けば

$$= \sum_{\mu \neq 0} \frac{u_{\mu}(X)}{\omega_0^2 \omega_{\mu}^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{H_{\nu 0}}{\omega_0^2 \omega_{\nu}^2} \int_{\sigma_0} u_{\mu}(X') \left\{ -f \frac{\partial^2 u_{\nu}}{\partial z^2} + f_r \frac{\partial u_{\nu}}{\partial r} + \frac{f_{\theta}}{r^2} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \theta} \right\} d\sigma$$

更に (3.57) を再び考慮すればこの右辺の積分は  $H_{\mu\nu}$  と書けるから

$$= \sum_{\mu \neq 0} \frac{u_{\mu}(X)}{\omega_0^2 \omega_{\mu}^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{H_{\mu\nu} H_{\nu 0}}{\omega_0^2 \omega_{\nu}^2} \quad (3.58)$$

となる。これが (3.49) の第3項を与える。これは摂動論の公式 (3.9) の第3項のうちの2重和の部分に一致する。1重和の部分はあらわれていない。後者の部分は § 5 で示した様に本章の問題では寄与が0になる。

次に  $\sigma$  上  $S$  型境界の場合を取扱う。この時  $U_0$  ならびに  $u_{\nu}$  は (3.4) の境界条件をみたすものとする。この場合は上の  $S'$  型の場合よりも簡単に計算することが出来る。(3.49) に対応して

$$U_0 = u_0 + \varepsilon U' + \varepsilon^2 U'' + \dots \quad (3.59)$$

および (3.50) に対応して  $z=0$  の近傍で

$$u_0 = z \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial z^3} + \dots \quad (3.60)$$

と展開する。 $U', U''$  も同様に展開するものとする。(3.46) に対応して

$$U_0 = 0, \quad (\sigma \text{ 上}) \quad (3.61)$$

であるから (3.59) に (3.60) 等の展開式を代入して (3.61) の境界条件をあらわし、各  $\varepsilon$  の巾について記述すれば (3.53) (3.54) に対応して

$$\varepsilon^1 : U' + f \frac{\partial u_0(0)}{\partial z} = 0 \quad (3.62)$$

$$\varepsilon^2 : U'' + f \frac{\partial U'(0)}{\partial z} = 0 \quad (3.63)$$

がえられる。 $\varepsilon^3$  以上は多少項数が増加する。Green 函数には (3.55) の形を用いるが、今の場合  $u_{\nu}$  は  $\sigma_0$  上  $S$  型境界条件を満たすものである。したがって Green 函数も同じ境界条件を満たす。(3.56) に対応して (3.62) を用いれば

$$\begin{aligned}
U'(X) &= \int_{\sigma_0} \frac{\partial G(X|X')}{\partial n'} U'(X') d\sigma \\
&= \sum_{\mu=0} \frac{u_{\mu}(X)}{\omega_0^2 - \omega_{\mu}^2} \int_{\sigma_0} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial z} \frac{\partial u_0}{\partial z} f d\sigma
\end{aligned} \tag{3.64}$$

がえられる。これが (3.59) の第2項を与える。一方 (3.7) で定義された変形の行列要素は

$$H_{\nu 0} \equiv - \int_{\sigma_0} u_0 \frac{\partial u_{\nu}}{\partial n} d\sigma = - \int_{\sigma_0} \left\{ f \frac{\partial u_0}{\partial z} + 0(\epsilon^3) \right\} \left\{ - \frac{\partial u_{\nu}}{\partial z} + 0(\epsilon^2) \right\} d\sigma$$

と書くことが出来るから、これを (3.9) の1次摂動項に代入したものと (3.64) を (3.59) の第2項に用いたものを比較すれば、これらは  $0(\epsilon^2)$  まででは一致していることがわかる。即ちこの場合も二つの方法は変形の1次の項に関しては一致する。2次の効果も (3.63) から全く同じように求められる。(3.62) (3.63) が全く同形であることを利用すれば結局  $S'$  型の場合と同じ結論、即ち公式 (3.9) の2次摂動の項のうち2重和の部分は一致し、1重和の部分はあられないこと、がえられる。

以上によつて  $S$  型、 $S'$  型、いずれの場合も摂動に対する2つの取扱いはかなりよく一致することが示された。2次の効果に対する両者の部分的な不一致は今のところ明らかではないが、次の理由が考えられる。本節の取扱いは境界条件のみから場の摂動を導びいたが、固有周波数の変化は近似的に無視出来るものとした。したがつて本節の取扱いで周波数変化を考慮すれば2次摂動の1重和の部分はあられ得るのではないかと期待される。しかしいずれにしても空胴の境界の形が変化したために生ずる摂動の高次の項の計算には、場の固有函数による展開の収束の問題が関連し、収束の改善法を考察しなければならないので取扱いには注意が必要である<sup>20)</sup>。

## 第 4 章 励 振 理 論

### § 1 励振理論

励振の理論は実際上の問題，すなわち自励発振器あるいは増巾器，検出器における共振器と線路の結合の問題，として重要である。又現在よく行われているマイクロ波模型による Fabry Perot 共振器の実験的研究も本質的には励振の実験であることから励振問題の理論解析が要求される。現在までの Fabry Perot 共振器の研究はすべて自由振動モードに対してのみ行なわれ，励振問題は殆んど着手されていないが，それは励振の定式化とそれにつゞく具体的解析が困難であるためと思われる。閉じた空洞と線路との結合理論はよく知られているが，元来自由振動モードの研究はより一般的な励振問題の取扱いの前段階として必要なのである。しかしながら Fabry Perot 共振器のような開口共振器の結合または励振の取扱いでは閉じた空洞における取扱いの拡張として，不安定自由振動モードをすべて先に求めてそれによって場を展開するといったような定式化がどのように可能であるかを示すことは難しい問題である。第 1 章 § 2 でのべたようにその様な定式化の一つが Vainshtein<sup>58)</sup> によって示されている。それは散乱問題における  $S$  行列理論といわれるものの一つの形式であつて不安定共振というものを  $S$  行列によって数学的に取扱おうとするものである。この論文は現在のところ開口共振器の励振を問題にした唯一つのものであるが，境界条件の単純でない Fabry Perot 共振器に対して具体的に適用することは事実上実行不可能であり単に応用数学上の興味にとどまっている。したがつて実際の Fabry Perot 共振器に関して具体的な知識を提供しうる現実的な理論が要求される。こゝでは一般の形状の共振器ではなく平行平面共振器を取上げ，励振問題というより一般的な見地から従来の自由振動の理論の考察，批判を行ない，正しく励振問題を定式化することを試みる。

第 1 章 § 2 では Fabry Perot 共振器の研究を年代順に概観した。Fabry Perot 共振器の今までの解析は上の論文を除けばすべて不安定な共振モードすなわち自由振動のみを対象にしているが，その理論は共振像の捕え方に応じて干涉計像，導波管像，空洞像の 3 種に分類出来る。干涉計像は Fox, Li によつて最初に定式化された最もよく知られている理論である。これは Kirchhoff 近似を用いて種々の形状の Fabry Perot 共振器の問題を容易に定式化出来る利点をもつが，解析的に取扱いうる対象はかなり制限される。又定式化が

かなり固定しているために種々の変形した問題への適用は困難であり、特に内部の場に対する描像が欠けているために励振に対する定式化も困難である。導波管像はVainshteinによるものであつて、Fabry Perot 共振を2枚の鏡面間の遮断状態に近い導波管波が開口面で反射されて生ずる導波管共振とみなすものである。VainshteinはWiener-Hopf法で求められた開口面による導波管波の反射係数を利用して共振モードの回折損失を求め、Fox Liの数値計算とよく一致する式を得ている。この取扱い自体は自由振動モード以外の問題には適さないが、Fox Liの結果とよく一致することは描像の正しさを裏付けている。空洞共振像は第2章、第3章で取扱つたものであつて、0次近似に空洞共振像を探り開口よりの輻射を摂動とみなすものである。これは描像が簡単であつて第3章のように鏡面変形の問題などを容易に取扱いうる利点をもつが、一方第2章でみた様に自由振動モードの0次近似として採るべき閉空洞固有函数の境界条件を前もって定義すべき指針がないという欠点をもっている。導波管像と空洞像との中間とみられるものにRisken<sup>47)</sup>による開口面での連続条件を解く方法がある。これは外部を輻射場とみなし内外部を開口面によつて区別した描像を出発点にしたという意味で空洞的であり、又内部の場を2つの量子数で指定される波動函数で展開したという意味で導波管的である。つまり2つの量子数で指定される波動は本質的には導波管定在波であるからである。これに反して空洞像では内部の場は3つの量子数で指定される波動函数すなわち完全な空洞の固有函数で展開されている。Vainshteinの取扱いにもみられるように遮断状態に近い導波管波の反射係数が非常に大きくなるということは内外部の区別を暗示している。空洞像は共振周波数近傍では良い描像を与えるが、励振問題では周波数を任意に変化させるから、一般に開口面上の境界条件は大きく変化し、その度毎に異なつた境界条件の下における固有函数で展開しなければならない。それに反し導波管像では2つの量子数をもつ導波管定在波で展開するから周波数変化による開口上の境界条件の変化は問題にならない。したがつて導波管像は広い周波数にわたり適用性をもつ。導波管像ではVainshteinのように導波管モードの開口反射係数によつて励振問題を取扱いうる可能性がある。しかしWiener-Hopf法によつてすべてのモードおよび周波数に対する反射係数を求めることは困難な仕事であり、しかも又円筒波の反射係数は平面波のそれを用いるという仮定も含まれている。Riskenの方法では開口面の境界値は一種類しか問題にしないように理論がつくられている。そのために開口面上で法線微分が0になるGreen函数を用いて外部の場を限定している。したがつて概念的には鏡面間の共振というよりは半円柱間の共振と云うべきものである。(図4.1上図参照。)そのために開口よりの輻射は後方導体のない時に比べ鏡像源からの輻射が付加わつて丁度空洞



理論の結果の2倍になつている(2.63)(2.72)参照)。しかしこの理論では開口におけるモード変換を考慮して内部の場を求め、Fox Liの求めた場の分布におけるリップルに対応するものが得られることを示した

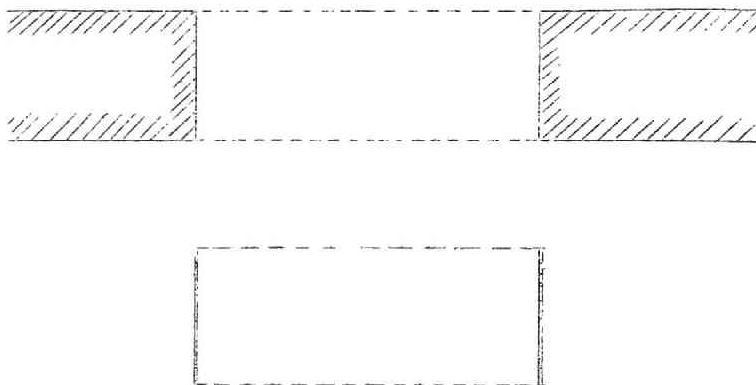


図 4.1 Fabry Perot 共振器の概念図

点重要である。空洞理論では損失を求めることは出来ても内部の場の分布を与えなかつたが、それは空洞内の場は3つの量子数で指定された函数による展開であつて、完全系ではあるけれども場そのものを求めるには収束が遅いためであり、一方導波管定在波による展開、すなわち2つの量子数に関する展開は場の値を求めるには収束が速いのである。以上の考察によつてすべての周波数領域を取扱うには導波管像を基準にしなければならない。しかもVainshtein, Riskenの理論における不利な点を含まないように励振問題を定式化する必要がある。

第1に、外部は空洞理論の時と同様、自由空間の輻射場であつて、Riskenの理論のような外部導体のないものを取扱わねばならない。したがつて開口面では同時に2種類の境界値、場の値と場の法線微分とを問題にしなければならない。

第2に、内部の場は2つの量子数で指定された導波管波であらわさねばならない。したがつて内部の場の励振は導波管波によるGreen函数、即ち2つの量子数により展開されたGreen函数を用いなければならない。

第3に、開口面において2種類の境界値を等しいとおいて内外部の場を接続することが必要である。したがつて連続条件として2種類の境界値函数を未知函数とする連立積分方程式を解かねばならない。

以上によつて本章の主題である平行平面Fabry Perot 共振器の完全な励振理論を定式化することが出来る。又必要となれば鏡の裏面をも考慮した定式化も可能である。励振の方式としては種々のものが考えられる。実際的なものとしては鏡面の中央部の小孔を通して外部より励振波を送りこむ場合、同軸アンテナによるもの、導波管と結合するもの、あるいは半透反

射鏡を通して鏡面全体を外部より励振するものあるいは又内部に空間的に分布した荷電，電流分布によるもの等々である。これらの重要な問題の解析は現在引継いて進行中である。こゝでは最も簡単な場合としてまず鏡面上に電流分布を与えた場合の励振問題を定式化する。上にあげた其他の問題はこの理論を修正して論ずることが出来る。この章においては上に述べた方針に基づいて励振問題を定式化して，基礎方程式として無限次元連立ベクトル方程式を導びき，必要な種々の行列要素の積分を実行する。第5章においては問題の特別の場合として無励振問題を解き従来の理論によつて求められていた不安定自由振動モードの回折損失，場の分布を求めVainshtein, Fox, Liの結果とよく一致することを示す。第6章においては励振理論の応用として鏡面変形の場合の自由振動を論じ，回折損失を求めて第3章の空洞理論による鏡面変形の場合の結果の再確認と修正とを行なう。本論文においてはFabry Perot 共振器の自由振動モードを主題としているので，励振問題の結果に立入らないことにする。

## § 2 基礎方程式

§ 1で述べたような描像に基づいて平行円板型Fabry Perot 共振器の励振の問題をスカラー波に対し境界値問題として取扱う。

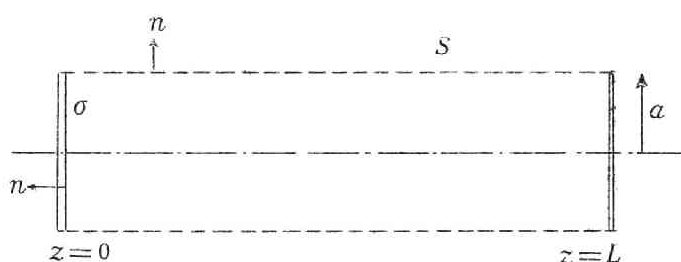


図 4.2 平行円板型 Fabry Perot 共振器

共振器の構造は図 4.2 のような平行円板型とし，側面  $S$  は開いており， $\sigma$  は鏡面である。今考える励振問題としては鏡は完全反射面とし，鏡面上に与えられた電流分布（即ち境界値）により励振するものと考え。解析は便宜上スカラー

で行なう。電磁場としてのベクトルとの対応を与えていないので励振源としての境界値あるいは源点（source）の空間的な分布を電流分布，電荷分布などと呼ぶことは正しくないが，スカラー波動の理論ではその様な適当な呼称がないので仮にその様に呼ぶことにする。§ 1で述べたその他の種々の励振方式はこゝに述べられる方法をいくらか修正することによつて解析することが出来る。簡単のために  $S$  と  $\sigma$  とで囲まれる領域を共振器の内部，領域の外側を外部

と呼ぶことにする。内，外部は自由空間として取扱うが，内部が媒質で満たされている場合にも理論の適用は可能である。

Fabry Perot 共振器の励振問題の一つの型を境界値問題として次の形に設定する。其他の種々の励振問題はこれを基にして定式化することが出来る。

境界値問題 : スカラー波動函数  $\varphi(X)$  に対する Helmholtz 波動方程式 ( $C=1$  の単位系)

$$\nabla^2 \varphi(X) + \omega^2 \varphi(X) = 0, \quad (4.1)$$

において，完全反射面の境界条件は内外共に

$$\varphi(X) = 0, \quad X: \text{鏡面上} \quad (4.2)$$

とする。その時内部側鏡面  $\sigma$  上の電流分布による励振は，鏡面  $\sigma$  上的一部分において (4.2) の代りに

$$\varphi(X) = \varphi_0(X) \quad X: \text{鏡面の一部} \quad (4.3)$$

なる境界値をとり，かつ外部無限遠方において輻射条件を満足する (4.1) の解を見出すことである。

$S$  および  $\sigma$  上の法線方向を図 4.2 の様にとることにする。又  $S$  上の場の値  $\varphi$  および法線微分の値  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  が知られているものとする。外部および内部の場に対し Green 函数の方法を適用する。Green 函数は非斉次波動方程式 (2.10) を満足する。

内部の場 : 内部においては鏡面内側  $z=0$  ,  $z=L$  で (4.2) と同じ境界条件

$$G(X|X') = 0, \quad X \text{ 又は } X': \sigma \text{ 上} \quad (4.4)$$

を満たす Green 函数  $G(X|X')$  を用いるならば内部の場  $\varphi_i(X)$  は Green の定理を用いることによつて

$$\begin{aligned}\varphi_i(X) = & - \int_{\sigma} \frac{\partial G(X|X')}{\partial n'} \varphi_0(X') d\sigma \\ & + \int_S \left[ G(X|X') \frac{\partial \varphi(X')}{\partial n'} - \frac{\partial G(X|X')}{\partial n'} \varphi(X') \right] dS\end{aligned}\quad (4.5)$$

とあらわされる。

外部の場 : 上と同様に外部の場  $\varphi_e(X)$  も書くことが出来る。励振は鏡面の内部側から行なっており、しかも実際適用する場合は波長  $\lambda$  が  $L$  に比し十分短かく、内部の場も主として  $z$  方向の定在波からなっているから、鏡面の外側つまり裏面には殆んど場はまわりこまない。それ故

$$\frac{\partial \varphi_e(X)}{\partial n} \sim 0 \quad X: \text{鏡面の裏面} \quad (4.6)$$

と仮定できる。したがって  $\varphi_e(X)$  には鏡の裏面の効果はないから外場は  $S$  よりの輻射波のみをあらわしていると考えてよく、外部では自由空間の Green 函数  $H(X|X')$  を用いるのが適当である。この章および以下では 2 種類の Green 函数を使用するので混同をさけるために外部の自由空間の Green 函数を  $H(X|X')$  であらわし、(4.4) の内部の Green 函数  $G(X|X')$  と区別する。図 4.3 の  $S, S'$  の形成する円筒面では Green の定理を適用する時  $S'$  の寄与は無視することが出来、更に輻射条件によって無限遠方の寄与は消えるから、円筒外部の場は結局

$$\varphi_e(X) = - \int_S \left[ H(X|X') \frac{\partial \varphi(X')}{\partial n'} - \frac{\partial H(X|X')}{\partial n'} \varphi(X') \right] dS \quad (4.7)$$

によって与えられる。

云うまでもなく裏面  $\sigma'$  を考慮する定式化も可能である。それは  $\lambda > L$  の場合には必要であ

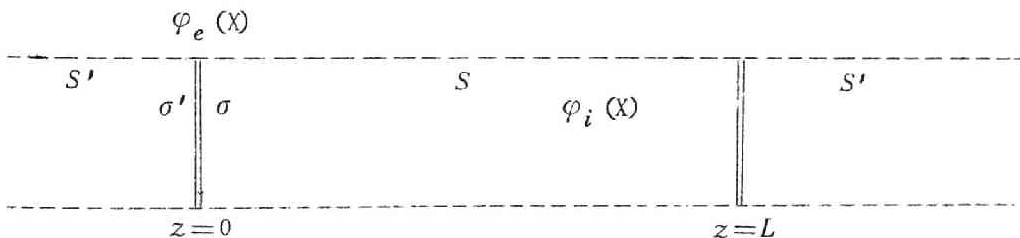


図 4.3 積分面の定義

つて、領域を3つにわけ、 $S'$ と $\sigma'$ との作る半円筒内における外場も考察すればよい。又厳密なことを云えば上に設定した境界値問題には鏡面 $\sigma$ に対する縁端条件 (edge condition)<sup>84)</sup>も必要であるが、今扱っている問題では鏡の裏面の効果を無視して(4.7)を採っているのでそのような条件なしに議論を進めることが出来る。

(4.5) (4.7)の物理的意味をのべる。(4.4)は内部の場を平行平面導波管内の波として考えることを意味するので、内部の観察者にとっては場は電流源から発生した伝播波と、それによって開口面 $S$ に発生した等価な電荷、電流分布による波をあらわしており、一方外部の観察者にとっては、開口面 $S$ 上に分布した等価な電荷、電流分布による輻射波のみからなっているように見えることを示している。

連続条件 : 内、外部の場は $S$ 上でなめらかにつながっていなければならない。即ち場の振巾と $S$ 面における法線微係数とが $S$ 上で連続であることが要求される。

$r=a$ における $S$ 上において

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(a-0) &= \varphi_e(a+0) \\ \frac{\partial \varphi_i(a-0)}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi_e(a+0)}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

具体的に書けば(4.5) (4.7)により

$$\begin{aligned} & - \int_{\sigma} \frac{\partial G(a|x')}{\partial n'} \varphi_0(x') d\sigma + \int_S \left[ G(a|x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial r'} - \frac{\partial G(a-0|x')}{\partial r'} \varphi(x') \right] dS \\ & = - \int_S \left[ H(a|x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial r'} - \frac{\partial H(a+0|x')}{\partial r'} \varphi(x') \right] dS \quad (4.9) \\ & - \int \frac{\partial^2 G(a-0|x')}{\partial r \partial n'} \varphi_0(x') d\sigma + \int_S \left[ \frac{\partial G(a-0|x')}{\partial r} \frac{\partial \varphi(x')}{\partial r'} - \frac{\partial^2 G(a-0|x')}{\partial r \partial r'} \varphi(x') \right] dS \\ & = - \int_S \left[ \frac{\partial H(a+0|x')}{\partial r} \frac{\partial \varphi(x')}{\partial r'} - \frac{\partial^2 H(a+0|x')}{\partial r \partial r'} \varphi(x') \right] dS \quad (4.10) \end{aligned}$$

となる。こゝで $S$ 面上の積分は $x'$ について $r'=a$ とおいてとられる。 $a \pm 0$ 等はGreen函数の $x=x'$ における特異性を考慮して $r \rightarrow a$ の極限のとり方を意味したものである。

(4.5) (4.7) では,  $S$  上の  $\varphi$  および  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  の値が知られているものとしたが, 上の2つの連続条件 (4.9) (4.10) は  $S$  上の未知函数  $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  を決定するための連立積分方程式であると考えられる。即ち, 開口面上における2種の境界値  $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , あるいは等価的な電荷, 電流分布に対する方程式である。この2種の境界値函数が知られれば, (4.5) (4.7) によって内, 外部の場を求めることが出来る。

**Green 函数** : 境界条件 (4.4) を満足する内部の Green 函数の円筒表示は既に第2章 § 4.2 で準備したものであつて, それは (2.36) に加法定理を適用して得られる。すなわち,

$$G(X|X') = \frac{i}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l J_l\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) H_l^{(1)}\left(\Lambda_n \frac{r'}{a}\right) \cos l(\theta - \theta')$$

$$(r' > r, \quad 0 \leq z, z' \leq L) \quad (4.11)$$

で与えられる。ここに

$$\Lambda_n^2 \equiv (\omega a)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_l \equiv \begin{cases} 1 & , \quad l=0 \\ 2 & , \quad l \geq 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

とされている。 $r' < r$  の場合は (4.11) で  $r$  と  $r'$  とを交換したものである。この Green 函数は, 無限平行平面導波管の円筒波伝播を記述するものである。

外部における自由空間の Green 函数  $H(X|X')$  の円筒表示には既に第2章で使用したものをを用いる。即ちそれは (2.33) に加法定理を適用したものであつて

$$H(X|X') = \frac{i}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l \cos l(\theta - \theta') \int_0^{\infty} dk J_l(\sqrt{\omega^2 - k^2} r) H_l^{(1)}(\sqrt{\omega^2 - k^2} r') \cos k(z - z')$$

$$(r' > r) \quad (4.14)$$

で与えられる。 $r' < r$  の場合には (4.14) で  $r$  と  $r'$  とを交換したものである。以下においては第1種 Hankel 函数しかあらわれないので  $H_l^{(1)}$  は  $H_l$  と略記する。

**基礎方程式** : 連立積分方程式 (4.9) (4.10) を次のように無限次元の非斉次連立ベクトル方程式に書き換え, それを基礎方程式と呼ぶことにする。

$S$  上における2種の未知境界値函数:  $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  を  $S$  上におけるよく知られた完全直交系によつ

て次の様に展開する。

$$[\varphi(X)]_{r=a} = \sum_{n,l,\pm} b_{nl}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{matrix} \right\} \quad (4.15)$$

$$\left\{ \frac{\partial \varphi(X)}{\partial n} \right\}_{r=a} = \frac{1}{a} \sum_{n,l,\pm} a_{nl}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{matrix} \right\} \quad (4.16)$$

こゝで  $a_{nl}^{\pm}$ ,  $b_{nl}^{\pm}$  ( $n=1, 2, \dots$ ,  $l=0, 1, 2, \dots$ ) は Fourier 係数であり,  $+$ ,  $-$  は  $\left\{ \begin{matrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{matrix} \right\}$  の中の  $\cos l\theta$ ,  $\sin l\theta$  の項にそれぞれ対応する。

(4.15) (4.16) を Green 函数の円筒表示 (4.11) (4.14) と共に連続条件 (4.9) (4.10) に代入し, 表面積分のさいにあらわれる積分に対し (2.41) (2.42) 等の関係を用いて整理すれば, (4.9) (4.10) の連立積分方程式は 2 組の Fourier 係数  $\{a_{nl}^{\pm}\}$ ,  $\{b_{nl}^{\pm}\}$  に対する次の無限次元の連立ベクトル方程式に帰着する。これを以下において励振問題の基礎方程式と名づける。

$$\left. \begin{aligned} & J_l(A_n) H_l(A_n) a_{nl}^{\pm} - A_n J_l(A_n) H'_l(A_n) b_{nl}^{\pm} \\ & + 8N \left\{ \sum_{n'} K_{nn'}^l a_{n'l}^{\pm} - \sum_{n'} L_{nn'}^l b_{n'l}^{\pm} \right\} = -2\epsilon_l N H_l(A_n) \psi_{nl}^{\pm} \\ & A_n J'_l(A_n) H_l(A_n) a_{nl}^{\pm} - A_n^2 J'_l(A_n) H'_l(A_n) b_{nl}^{\pm} \\ & + 8N \left\{ \sum_{n'} M_{nn'}^l a_{n'l}^{\pm} - \sum_{n'} N_{nn'}^l b_{n'l}^{\pm} \right\} = -2\epsilon_l N A_n H'_l(A_n) \psi_{nl}^{\pm} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots, l=0, 1, 2, \dots) \quad (4.17)$$

但し

$$N = \frac{a^2 n}{2L^2} = \frac{a^2}{\lambda L} \quad (4.18)$$

は Fresnel 数であり, (4.17) の右辺の

$$\psi_{nl}^{\pm} \equiv \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a J_l\left(A_n \frac{r}{a}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{matrix} \right\} \varphi_0(r, \theta) r dr d\theta \quad (4.19)$$

は励振の強度をあらわす項である。又 (4.17) は左辺の行列要素  $K_{nn'}^l$  等は (2.42) を用いたときあらわれるものであつて

$$\left. \begin{aligned}
K_{nn'}^l &\equiv \int_0^\infty H_l(\lambda) J_l(\lambda) I_{nn'}(\kappa) d\kappa \\
L_{nn'}^l &\equiv \int_0^\infty \lambda H_l(\lambda) J'_l(\lambda) I_{nn'}(\kappa) d\kappa \\
M_{nn'}^l &\equiv \int_0^\infty \lambda H_l(\lambda) J'_l(\lambda) I_{nn'}(\kappa) d\kappa \\
N_{nn'}^l &\equiv \int_0^\infty \lambda^2 H'_l(\lambda) J'_l(\lambda) I_{nn'}(\kappa) d\kappa
\end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

但し

$$A^2(\kappa) \equiv (\omega a)^2 - \kappa^2 \quad (4.21)$$

$$I_{nn'}(\kappa) \equiv \omega a \cdot \frac{n'}{n} \frac{1 - (-1)^n \cos(\kappa \frac{L}{a})}{\left[ \left( \frac{n\pi a}{L} \right)^2 - \kappa^2 \right] \left[ \left( \frac{n'\pi a}{L} \right)^2 - \kappa^2 \right]} \quad (4.22)$$

( $n - n' = \text{偶数}$ )

とあらわされる。(4.22)は(2.42)によつて $n - n' = \text{奇数の時は} 0$ となり、したがつて(4.20)もその時0となる。今取扱つている問題では $\lambda \ll L$ と考えており、 $n, n'$ として(2.47)の様に非常に大きい数を考えているので $\frac{n - n'}{n} \ll 1$ である。それ故(4.22)で $\frac{n'}{n}$ は1とおいて十分正確である。

以上によつて励振の問題は、電流分布 $\varphi_0(r, \theta)$ が与えられた時(4.19)を計算すれば基礎方程式(4.17)の右辺の励振項が定まるから、基礎方程式(4.17)を解くことに帰着される。

内部の場合：基礎方程式(4.17)を解いて $\{a_{nl}^\pm\} \{b_{nl}^\pm\}$ が求められたならば(4.15)(4.16)によつて開口面 $S$ 上における $\varphi$ および $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ の境界値が知られたことになる。これがわかれば(4.5)(4.7)によつて内、外部の場が計算される。特に興味のあるのは内部の場 $\varphi_i(x)$ であるから(4.5)に(4.15)(4.16)を用いて $\{a_{nl}^\pm\} \{b_{nl}^\pm\}$ であらわすと次の様になる。



$$\begin{aligned}
\varphi_i(r, \theta, z) = & i\pi N \sum_{n, l, \pm} \varepsilon_l \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos l \theta}{\sin l \theta} \right\} \\
& \times \left\{ H_l\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos l \theta'}{\sin l \theta'} \right\} \int_0^r J_l\left(\Lambda_n \frac{r'}{a}\right) \varphi_0(r', \theta') r' dr' d\theta' \right. \\
& + \left. J_l\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos l \theta'}{\sin l \theta'} \right\} \int_r^a H_l\left(\Lambda_n \frac{r'}{a}\right) \varphi_0(r', \theta') r' dr' d\theta' \right. \\
& + i \frac{\pi}{2} \sum_{n, l, \pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos l \theta}{\sin l \theta} \right\} J_l\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \{H_l(\Lambda_n) a_{nl}^{\pm} - \Lambda_n H_l'(\Lambda_n) b_{nl}^{\pm}\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

第1項は電流分布  $\varphi_0(r', \theta')$  により直接に作られる平行平面導波管内の場であり，これが二つの積分に対応する和にわかれていたのは，観測点  $(r, \theta)$  の内側  $(r' < r)$  に分布する電流分布と外側  $(r' > r)$  に分布するそれとの2つの寄与からなるためである。第2項は開口面により反射されて作られた場である。

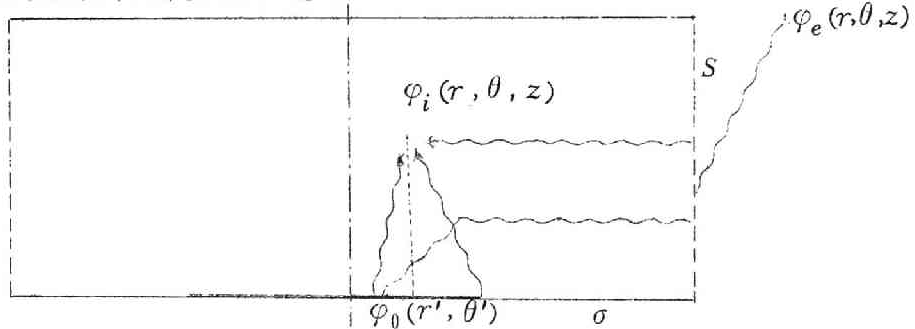


図 4.4 内外部の場の概念図

励振入力 : 単位面積当りの平均エネルギー束，すなわち電力の流れは，複素電力流

$$S = \frac{\varphi^* \nabla \varphi}{i \omega} \tag{4.24}$$

の実部  $S_r$  であられる<sup>85)</sup>。波動方程式 (4.1) を用いれば容易に示されるように

$$\operatorname{div} S = \frac{1}{i \omega} (\nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi - \omega^2 \varphi^* \varphi) \tag{4.25}$$

の関係が成立ち，従つて直ちに

$$\operatorname{div} S_r = 0 \tag{4.26}$$

$$\operatorname{div} S_i = \frac{1}{\omega} (\omega^2 \varphi^* \varphi - \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi) \quad (4.27)$$

が成立つ。一般に電力の流れ  $S_r$  は保存されるが、その虚部  $S_i$  は保存されない。特に(4.26)を共振器の内部の領域  $V$  にわたって積分するならば

$$P \equiv \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \int_a \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\sigma = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \int_s \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS \quad (4.28)$$

の関係がえられる。これは励振入力であつて鏡面  $\sigma$  を通つて流入する電力と開口面  $S$  を通つて流出する電力の等しいことを意味している。右辺の  $S$  上の積分は(4.15)(4.16)を用いて  $\{a_{nl}^\pm\}, \{b_{nl}^\pm\}$  であらわすことが出来る。すなわち

$$P = \frac{\pi L}{\omega} \operatorname{Im} \left( \sum_{n,l,\pm} \frac{b_{nl}^{\pm*} a_{nl}^\pm}{\varepsilon_l} \right) \quad (4.29)$$

(4.27)を同様に積分すれば

$$X = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \int_\sigma \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\sigma = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \int_s \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS + \frac{1}{\omega} \int_V (\omega^2 \varphi^* \varphi - \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi) dV \quad (4.30)$$

の関係がえられる。 $X$ は面  $\sigma$  における平均した反作用すなわちリアクタンス電力であるがこれは常に意味をもつわけではない。

### § 3 行列要素の計算

#### § 3.1 行列要素

基礎方程式を解く前に(4.20)で定義される行列要素を計算しなければならない。これは(4.21)によつて周波数の函数であるが、励振問題では周波数を任意に変化させる必要があるから、行列要素の周波数依存性をもあらわに示す必要がある。

(4.20)の積分にあらわれる函数(4.22)は次の様に変形される。

$$A^2(\kappa) = (\omega a)^2 - \kappa^2 \quad (\geq 0) \quad (4.31)$$

$$A_n^2 = (\omega a)^2 - \left( \frac{n\pi a}{L} \right)^2 \quad (\geq 0) \quad (4.32)$$

であるから

$$I_{nn'}(\kappa) = (\omega a) \frac{1 - \cos\left(\kappa \frac{L}{a} - n\pi\right)}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right] \left[\left(\frac{n'\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right]}$$

$$\simeq (\omega a) \frac{1 - \cos \frac{A_n^2 - A^2}{4\pi N}}{(A_n - A^2)(A^2 - A^2)} \quad (4.33)$$

但し右辺の近似では (2.50) の時と同様に  $A^2/(\omega a)^2 \ll 1$  であることを用いている。これは実際のレーザー共振器の場合は  $\omega a \gg 1$  であつて (4.20) の積分はこの条件の範囲内で十分速く収束するからである。(4.31) (4.32) で定義された  $A^2(\kappa)$ ,  $A_n^2$  は  $(\omega a)$  の値によつては正負の値をとることに注意する。(4.20) の積分における積分変数  $\kappa$  を (4.31) によつて  $A$  に変えると (2.51) と同様に積分領域は  $A$  の偏角に応じて2部分にわかれて積分領域は  $\int_0^{\omega a}, \int_0^\infty$  となる。(4.33) で用いた近似を考慮すれば  $\sqrt{(\omega a)^2 \pm A^2} \sim \omega a$  であり、又はじめの積分領域の上限  $\omega a$  は実質上  $\infty$  として差支えない。 $N$  が適当に大きい時 (4.33) の  $I_{nn'}(A)$  は  $A$  について緩く変化する函数であり、又一方 (4.20) の積分にあらわれる Bessel 函数の  $\text{Arg}(A) = 0$  の部分は  $I_{nn'}(A)$  に比して急激に振動する函数であるから、Bessel 函数に漸近展開を用いて積分する時振動部分は平均値におきかえて十分正確である (第2章図2.6参照)。但しこの近似は  $N \sim 1$  の近傍およびそれより小さい  $N$  の値に対しては正確ではない。この様にして Bessel 函数および変形 Bessel 函数に漸近形<sup>83)</sup>を用いて積分の近似を行なうならば、行列要素の積分 (4.20) は次の様に書直すことが出来る。但し  $n - n' = \text{奇数}$  の場合には 0 である。

$$K_{nn'} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_{n'}^2 - A^2)} \left[1 + O\left(\frac{1}{A^2}\right)\right] dA$$

$$- i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_{n'}^2 + A^2)} \left[1 + O\left(\frac{1}{A^2}\right)\right] dA \quad (4.34)$$

$$L_{nn'} = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_{n'}^2 - A^2)} \frac{1}{2A} A dA$$

$$- i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_{n'}^2 - A^2)} \left[1 + O\left(\frac{1}{A^2}\right)\right] A dA$$

$$- i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_{n'}^2 + A^2)} \left[1 - \frac{1}{2A}\right] A dA \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
M_{nn'} = & -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_{n'}^2 - A^2)} \frac{1}{2A} A dA \\
& + i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_{n'}^2 - A^2)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{A^2}\right) \right] A dA \\
& + i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_{n'}^2 + A^2)} \left[ 1 + \frac{1}{2A} \right] A dA \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{nn'} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_{n'}^2 + A^2)} \left[ 1 + \frac{1}{2A} \right] A^2 dA \\
& + i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_{n'}^2 + A^2)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{A^2}\right) \right] A^2 dA \quad (4.37)
\end{aligned}$$

但し

$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N} \quad (4.38)$$

とされている。\$N > 1\$であれば \$\alpha^2 \ll 1\$と考えると差支えない。\$A\_n^2\$は(4.32)で与えられる。上の近似においては行列要素は \$\ell\$ には関係しなくなっているので \$K\_{nn'}^\ell\$ などの \$\ell\$ は落している。又上の積分において \$O\left(\frac{1}{A^2}\right)\$ などは漸近形を用いる時にあらわれるその次の逆巾項を示したものであるが、一般に漸近級数は収束級数ではないから上の積分で展開の高次の項をとり入れても必ずしも積分を精密化したことにはならないことに注意する必要がある。

第2章においては積分 \$I\_0' + iI\_0''\$, \$I\_1' + iI\_1''\$ などの計算を行なったが、これは(2.53)(2.54)に漸近形を用いたものと(4.34)(4.37)とを比べるとわかる様にそれらは対角要素 \$K\_{nn}\$, \$N\_{nn}\$ の \$A\_n^2 = A\_{lm}^2\$ における値になっている。第2章では数値積分を行なって積分値を求めたが本章ではそれらを含む更に一般的な行列要素(4.34)~(4.37)の積分が実行出来ることを示し、それらを Fresnel 積分によつてあらわす。

### § 3.2 Fresnel 積分—I

本節および次節では積分(4.34)(4.37)を求めるための数学公式を準備する。

定義：

$$S(t) \equiv \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha \sin t x^2 dx \quad (4.39)$$

$$c(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\alpha \cos tx^2 dx \quad (4.40)$$

従つて又

$$s'(t) \equiv \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\alpha x^2 \cos tx^2 dx \quad (4.41)$$

$$c'(t) \equiv \frac{dc}{dt} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\alpha x^2 \sin tx^2 dx \quad (4.42)$$

こゝで  $s(t)$ ,  $c(t)$  等は  $\alpha$  の函数でもあるが、後の便宜のためにパラメタ  $t$  のみを変数として示し、パラメタ  $\alpha$  はあらわに書かなかつた。

(1)  $s(t)$ ,  $c(t)$  は Fresnel 積分の一つの変形になつている。よく使われる記号<sup>86)</sup>で書くならば

$$s(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} S\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\alpha\right), \quad c(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} C\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\alpha\right) \quad (4.43)$$

のようにならわされる。

(2) 定義から明らかなように、次の対称性がある。

$$\begin{aligned} s(-t) &= -s(t), & c(-t) &= c(t) \\ s'(-t) &= s'(t) & c'(-t) &= -c'(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

(3)  $s'(t)$ ,  $c'(t)$  は  $s(t)$  および  $c(t)$  であらわすことが出来る。附録 4.1 の (A 4.1) (A 4.2) を用いれば

$$s'(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\alpha}{2t} \sin t \alpha^2 - \frac{1}{2t} s(t) \quad (4.45)$$

$$c'(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\alpha}{2t} \cos t \alpha^2 - \frac{1}{2t} c(t) \quad (4.46)$$

(4)  $t\alpha^2 \ll 1$  に対しては次の展開式が利用出来る。これは定義 (4.39)~(4.42) において被積分函数の展開を項別積分して容易に求められる。

$$s(t) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ \frac{\alpha^2 t}{3} - \frac{\alpha^6 t^3}{7 \cdot 3!} + \frac{\alpha^{10} t^5}{11 \cdot 5!} - \dots \right\} \quad (4.47)$$

$$c(t) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ 1 - \frac{\alpha^4 t^2}{10} + \frac{\alpha^8 t^4}{9 \cdot 4!} - \dots \right\} \quad (4.48)$$

$$s'(t) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha^3 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{\alpha^4 t^2}{14} + \frac{\alpha^8 t^4}{11 \cdot 4!} - \dots \right\} \quad (4.49)$$

$$c'(t) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha^3 \left\{ -\frac{\alpha^2 t}{5} + \frac{\alpha^6 t^3}{9 \cdot 3!} - \dots \right\} \quad (4.50)$$

(5)  $t \alpha^2 \gg 1$  に対しては次の漸近展開が利用出来る。附録 4.1 (A 4.3) (A 4.4) に  
よつて

$$s(t) \sim \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2t}} - \frac{\cos t \alpha^2}{t \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\sin t \alpha^2}{t^2 \alpha^3} + \frac{3}{4} \frac{\cos t \alpha^2}{t^3 \alpha^5} + \dots \right\} \quad (4.51)$$

$$c(t) \sim \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2t}} + \frac{\sin t \alpha^2}{t \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\cos t \alpha^2}{t^2 \alpha^3} - \frac{3}{4} \frac{\sin t \alpha^2}{t^3 \alpha^5} + \dots \right\} \quad (4.52)$$

### § 3.3 Fresnel 積分—II

(6) 次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{A_n^2 - A^2} dA = s(A_n^2) - c(A_n^2) \quad (4.53)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{A_n^2 - A^2} dA = s(A_n^2) + c(A_n^2) \quad (4.54)$$

尚、以下においては  $s(A_n^2)$ ,  $c(A_n^2)$  などを  $s_n$ ,  $c_n$  のように略記する。

証明：

$$\begin{aligned} \sin \alpha^2 (A_n^2 - A^2) &= \sin \alpha^2 A_n^2 \cdot \cos \alpha^2 A^2 - \cos \alpha^2 A_n^2 \cdot \sin \alpha^2 A^2 \\ \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2) &= \cos \alpha^2 A_n^2 \cdot \cos \alpha^2 A^2 + \sin \alpha^2 A_n^2 \cdot \sin \alpha^2 A^2 \end{aligned}$$

と書いて両辺を  $\int_0^\infty dA$  で積分して、公式<sup>86)</sup>

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{\sin x^2 A^2}{\cos x^2 A^2} \right\} dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2x}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x^2 (A_n^2 - A^2) dA &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x^2 A_n^2}{2x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x^2 A_n^2}{2x} \\ \int_0^\infty \cos x^2 (A_n^2 - A^2) dA &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x^2 A_n^2}{2x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x^2 A_n^2}{2x} \end{aligned}$$

となる。ここで両辺を  $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \alpha^2 dx^2$  で積分すれば (4.53) (4.54) をうる。

(7) 次の公式が成立する。但し  $\alpha^2 (A_n - A_{n'}) = 2\pi\ell$  ( $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2) (A_{n'}^2 - A^2)} dA = \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ (s_n - c_n) - (s_{n'} - c_{n'}) \} \quad (4.55)$$

証明:  $\alpha^2 (A_n^2 - A_{n'}^2) = 2\pi\ell$  であることを用いて被積分函数を部分分数に分解し、

(4.53) を用いれば直ちに (4.55) がえられる。

(8) (4.55) の左辺で  $n = n'$  に対しては次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)^2} dA = \alpha^2 (s_n + c_n) - (s'_n - c'_n) \quad (4.56)$$

証明: (4.53) の両辺を  $A_n^2$  で微分すれば

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)^2} dA + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 \sin \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{A_n^2 - A^2} dA = s'_n - c'_n$$

となる。ここで (4.54) を用いれば (4.56) がえられる。

(9) 次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2) (A_{n'}^2 - A^2)} A^2 dA = \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ A_n^2 (s_n - c_n) - A_{n'}^2 (s_{n'} - c_{n'}) \} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)^2} A^2 dA &= \alpha^2 A_n^2 (s_n + c_n) - (s_n - c_n) \\ &\quad - A_n^2 (s'_n - c'_n) \end{aligned} \quad (4.58)$$

証明: 上はいずれも  $A^2 = A_n^2 - (A_n^2 - A^2)$  と書いて (4.53) (4.55) (4.56) を適用すればえられる。

(10) 次の公式が成立する (但しこれは Fresnel 積分とは関係がない)。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2) (A_{n'}^2 - A^2)} A dA + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2) (A_{n'}^2 + A^2)} A dA \\ &= \begin{cases} 0 & \ell \neq 0 \\ \frac{\alpha^2}{2}, & \ell = 0 \end{cases} \quad \text{但し } \alpha^2 (A_n^2 - A_{n'}^2) = 2\pi\ell \quad (\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.59)$$

証明:  $A^2 = x$  と積分変数を変えて積分を一つにまとめれば左辺は

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - x)}{(A_n^2 - x)(A_{n'}^2 - x)} dx = \frac{(-1)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha^2}{2} (A_n^2 - x)}{A_n^2 - x} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha^2}{2} (A_{n'}^2 - x)}{A_{n'}^2 - x} dx \\ &= (-1)^l \frac{1}{A_n^2 - A_{n'}^2} \sin \left\{ \frac{\alpha^2}{2} (A_n^2 - A_{n'}^2) \right\} = (-1)^l \frac{\sin l\pi}{A_n^2 - A_{n'}^2} \end{aligned}$$

となつて (4.59) の右辺がえられる。こゝで文献 86) P. 262 の積分公式を用いた。

### § 3.4 Fresnel 積分で表わした行列要素

前 2 小節で導びいた公式を利用するならば, 行列要素の積分 (4.34) ~ (4.37) はすべて Fresnel 積分であらわすことが出来る。但し  $n - n' =$  奇数の時は行列要素は 0 である。

(1) 行列要素  $K_{nn'}$

(4.34) は (4.55) (4.56) (4.44) によつて次の様に書ける。

非対角要素 ( $n \neq n'$ )

$$\begin{aligned} K_{nn'} &= \frac{1}{A_n^2 - A_{n'}^2} \{ (s_n - c_n) - (s_{n'} - c_{n'}) \} \\ &\quad + i \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ - (s_n + c_n) + (s_{n'} + c_{n'}) \} \end{aligned} \quad (4.60)$$

対角要素 ( $n = n'$ )

$$K_{nn} = \alpha^2 (s_n + c_n) - (s'_n - c'_n) + i \{ \alpha^2 (s_n - c_n) + (s'_n + c'_n) \} \quad (4.61)$$

展開式:  $(\alpha A_n)^2 \ll 1$  における (4.61) の展開式は (4.47) ~ (4.50) を用いれば

$$K_{nn} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha^3 \left\{ \frac{2}{3} (1 - i) + \frac{2}{15} \alpha^2 A_n^2 (1 + i) - \frac{2}{70} \alpha^4 A_n^4 (1 - i) - \dots \right\} \quad (4.62)$$

(2) 行列要素  $L_{nn'}$ ,  $M_{nn'}$

(4.35) (4.36) で与えられた積分は (4.55) (4.56) (4.59) (4.44) によつて次の様に書ける。

非対角要素 ( $n \neq n'$ )



$$\begin{aligned}
L_{nn'} = M_{nn'} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ (s_n - c_n) - (s_{n'} - c_{n'}) \} \\
& + i \frac{1}{2} \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ (s_n + c_n) - (s_{n'} + c_{n'}) \} \quad (4.63)
\end{aligned}$$

対角要素 ( $n=n'$ )

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{L_{nn}}{M_{nn}} \right\} = & \frac{1}{2} \{ -\alpha^2 (s_n + c_n) + (s'_n - c'_n) \} \\
& \mp i \frac{\alpha^2}{2} - i \frac{1}{2} \{ \alpha^2 (s_n - c_n) + (s'_n + c'_n) \} \quad (4.64)
\end{aligned}$$

但し右辺の $\mp$ は左辺が $L_{nn}$ か $M_{nn}$ に従つてとるものとする。

展開式:  $(\alpha A_n)^2 \ll 1$  における (4.64) の展開式は (4.47) ~ (4.49) を用いて

$$\left\{ \frac{L_{nn}}{M_{nn}} \right\} \simeq \mp i \frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha^3 \left\{ \frac{1}{3} (1-i) + \frac{1}{15} \alpha^2 A_n^2 (1+i) - \frac{1}{70} \alpha^4 A_n^4 (1-i) - \dots \right\} \quad (4.65)$$

(3) 行列要素  $N_{nn'}$

(4.37) で与えられる積分は (4.57) (4.58) によつて

非対角要素 ( $n \neq n'$ )

$$\begin{aligned}
N_{nn'} = & \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ A_n^2 (s_n - c_n) - A_{n'}^2 (s_{n'} - c_{n'}) \} \\
& - i \frac{1}{A_{n'}^2 - A_n^2} \{ A_n^2 (s_n + c_n) - A_{n'}^2 (s_{n'} + c_{n'}) \} \quad (4.66)
\end{aligned}$$

対角要素 ( $n=n'$ )

$$\begin{aligned}
N_{nn} = & \alpha^2 A_n^2 (s_n + c_n) - (s_n - c_n) - A_n^2 (s'_n - c'_n) \\
& + i \{ \alpha^2 A_n^2 (s_n - c_n) + (s_n + c_n) + A_n^2 (s'_n + c'_n) \} \quad (4.67)
\end{aligned}$$

展開式: (4.67) の  $(\alpha A_n)^2 \ll 1$  における展開式は

$$N_{nn} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ (1+i) + \frac{1}{3} \alpha^2 A_n^2 (1-i) + \frac{1}{30} \alpha^4 A_n^4 (1+i) + \dots \right\} \quad (4.68)$$

## 第 5 章 自由減衰振動モード I

### § 1 自由振動

第 4 章 § 1 でものべた様に通常共振器の励振問題の取扱いにおいては自由振動、即ち無励振の場合の解を必要とする。すなわち、無励振の場合の固有値問題の解としての固有函数をまず求め、それによつて励振時の場を展開するのである。現在までに Fabry Perot 共振器の励振を論じた唯一つの Vainshtein の論文においても、定式化は S 行列によるものではあるがやはり不安定な自由振動を先に知る必要がある。しかしながら前章に定式化した励振理論においては自由振動の解は必要としない。このことは前章の理論が通常の強制振動の取扱いと非常に異なる特徴である。定式化から明らかなように場は自由振動モードの解によつて展開されていないのであつて、より数の少ない項による展開になつてゐる。にもかゝらず自由振動のモードに対応する解は自動的に含まれている。それは励振の周波数を変えてゆくと自由振動のモードに対応するところで一つの展開係数が非常に大きくなるからである。同じ展開係数は又異なる周波数のところでも大きくなることがありうるのであつて、一つの項がいくつもの自由振動のモードをあらわしうるのである。したがつてこのことから逆に、不安定な自由振動モードは複素周波数平面でみた展開係数あるいは励振入力の際によつて定義することが出来る。又別のいい方をすれば基礎方程式 (4.17) において励振しない場合すなわち右辺が 0 の齊次方程式において 0 でない解が存在するためには、左辺の係数のつくる行列式が 0 でなければならないが、その行列方程式の根として自由振動の固有複素周波数を定義することが出来る。先にのべた様にこの励振理論においては自由振動モードを求めることは励振問題を解くための不可欠の部分をおもてはたないが従来の Fabry Perot 共振器の理論はすべて不安定な自由振動のみを種々の方法で取扱いさまざまな結果を得ているから、こゝでも励振問題の特別な場合としての無励振問題を取扱つて得られる結果をそれらの結果と比べてみることは興味のあることである。こゝでのべる方法は従来のいくつかの理論と比較すると簡明であるだけでなく、回折損失、モードのパターン、位相分布が Fox Li のシミュレーションによる数値結果とよく一致し、更にモード・パターン、位相分布のこまかなリップルまでも完全に再現することが示される。この様な場の分布までがシミュレーションの結果と一致することは今までの理論的な解析では得られなかつたことである。又第 2、第 3 章において取扱つた空洞理論の仮定、す

なわち Fresnel 数が十分大きい時には Fabry Perot 共振器の自由振動モードは閉じた空洞共振器の固有函数で近似され、かつ開口面で  $\varphi=0$  の境界条件に近いということも数学的に立証される。更に空洞共振像によつて求めた損失は正しい値の約半分であつたが ((2.63) (2.71) 参照), その様な近似では何が欠けていたのかも明らかにされる。

こゝではまず無励振方程式の近似解法をのべる。実際の計算では回折損失, 場の分布は 1 次近似のみで取扱われるが, それはその近似で十分結果が一致するからである。§ 3 においては行列方程式の根として複素周波数を求めそれから回折損失と周波数変化を求める。これは Vainshtein<sup>46)</sup> の結果とよく一致し, 数値的には小さい Fresnel 数領域 ( $N < 5$ ) を除いては Fox, Li の結果と全く一致する。§ 4 では場の分布, いわゆるモードパターンと位相分布を求める。これはよく Fox, Li の結果を再現する。更に彼等のシミュレーションでは求められていない Fresnel 数ならびにモードに対しても場の分布の計算結果を与える。§ 5 に空洞理論の結果との関係および批判を与える。最後に Fox, Li との比較を行ない結果を考察する。

## § 2 無励振方程式の近似解法

励振源のない場合, 基礎方程式 (4.17) は次の様に書ける。

$$\begin{aligned} J_l(A_n)H_l(A_n)a_n - A_n J_l'(A_n)H_l'(A_n)b_n \\ + 8N \left\{ \sum_{n'} K_{nn'} a_{n'} - \sum_{n'} L_{nn'} b_{n'} \right\} = 0 \\ A_n J_l'(A_n)H_l(A_n)a_n - A_n^2 J_l'(A_n)H_l'(A_n)b_n \\ + 8N \left\{ \sum_{n'} M_{nn'} a_{n'} - \sum_{n'} N_{nn'} b_{n'} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

こゝで方程式は  $l, \pm$  に関して分離しているから  $a_{n_l}^{\pm}, b_{n_l}^{\pm}$  の  $l, \pm$  の添字は省略した。

(5.1) は  $\{a_n\} \{b_n\}$  に対する連立斉次ベクトル方程式であるから, すべての  $\{a_n\} \{b_n\}$  は 0 でない解が存在するためには  $A_n$  はこれらの係数の作る無限次行列方程式の根になつていなければならない。この根が自由振動モードに対応する周波数ならびに減衰振動の寿命を与え, その根に対応する  $\{a_n\} \{b_n\}$  が (4.23) の第 2 項によつてそのモードの場の分布を決定する。

(5.1) の係数の作る無限次行列方程式を直接解くことは出来ないが、行列要素の非対角要素は対角要素に比べて1次の微小量とみなすことが出来るならば以下の様に近似解法を考えることが出来る。これは異なる  $n$  の間の結合は小さいとみなすこと、つまり Green 函数 (4.11) で記述される導波管モードが開口面で反射される時のモード変換を小さいと考えることである。云うまでもなくこれは得られる結果において確認される。従がつて0次の近似として特別の  $n$  に注目する。すなわちレーザ-共振器として殆ど平面波共振に近いもの、つまり

$$A_n^2 = (\omega a)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \simeq 0 \quad (5.2)$$

の場合に最も近いようなモード  $n$  を考える。(5.2) から大きくはずれるようなモードの損失は非常に大きいと考えられる。それ故  $A_n^2$  が最も0に近いような  $n$  に注目し、それを  $n_0$  と記すことにする。

以上のことを用いて (5.1) を解くことを考える。注目しているモード  $n_0$  の振巾  $a_{n_0}$ ,  $b_{n_0}$  が0次の微小量とすれば、モード間の結合係数は1次の微小量であるから  $\{a_n\} \{b_n\}$   $n \neq n_0$  も又1次であると考えられる。したがって  $a_{n_0}$ ,  $b_{n_0}$  のうける反作用は2次である。このことを利用して (5.1) を逐次近似により解くことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} a_{n_0} &= a_{n_0}^{(0)} \\ b_{n_0} &= b_{n_0}^{(0)} + 0 + b_{n_0}^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots \\ b_n &= 0 + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad n \neq n_0 \quad (5.4)$$

とおく。ここで  $a_n^{(1)}$  などの肩につく (1), (2), ...などは1次, 2次 ... の微小量を意味している。0次の係数の方程式から定まる根  $A_{n_0}$  を  $A_0$  と記せば、非対角要素  $K_{nn}'(A_0)$  などは1次の小ささであるから

$$K_{nn}(A_0) = K_{nn}^{(0)}, \quad K_{nn}'(A_0) = K_{nn}^{(1)},$$

などと記す。その時 (5.3) (5.4) を (5.1) に代入して0次の項を比較すれば

$$\left. \begin{aligned} [J_L(A_0)H_L(A_0) + 8NK_{n_0 n_0}^{(0)}] a_{n_0}^{(0)} - [A_0 J_L'(A_0)H_L'(A_0) + 8NL_{n_0 n_0}^{(0)}] b_{n_0}^{(0)} &= 0 \\ [A_0 J_L'(A_0)H_L(A_0) + 8NM_{n_0 n_0}^{(0)}] a_{n_0}^{(0)} - [A_0^2 J_L'(A_0)H_L'(A_0) + 8NN_{n_0 n_0}^{(0)}] b_{n_0}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

がえられる。この係数の作る行列式の根が  $A_o$  であり、それに対応して  $a_{n_o}$ ,  $b_{n_o}$  の比が決定される。(5.3)で  $a_{n_o}$  に対しては高次の補正項を加えなかつたのは  $a_{n_o}$  と  $b_{n_o}$  の比しか定まらないことを考慮したためである。

1次の項を比較すれば

$$\left. \begin{aligned} & [J_l(A_n)H_l(A_n)+8NK_{nn}^{(0)}]a_n^{(1)} - [A_n J_l'(A_n)H_l'(A_n)+8NL_{nn}^{(0)}]b_n^{(1)} \\ & \quad = -8NK_{nn_o}^{(1)} a_{n_o}^{(0)} + 8NL_{nn_o}^{(1)} b_{n_o}^{(0)} \\ & [A_n J_l'(A_n)H_l(A_n)+8NM_{nn}^{(0)}]a_n^{(1)} - [A_n^2 J_l'(A_n)H_l'(A_n)+8NN_{nn}^{(0)}]b_n^{(1)} \\ & \quad = -8NM_{nn_o}^{(1)} a_{n_o}^{(0)} + 8NN_{nn_o}^{(1)} b_{n_o}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (n \neq n_o) \quad (5.6)$$

(5.5)により(5.6)の右辺は既知であるからこれをといて  $\{a_n^{(1)}\}\{b_n^{(1)}\}$   $n \neq n_o$  が定まる。2次の項を比較すれば

$$\left. \begin{aligned} & \Delta_K(A)a_{n_o}^{(0)} - \Delta_L(A)b_{n_o}^{(0)} - [A_o J_l(A_o)H_l(A_o)+8NL_{n_o n_o}^{(0)}]b_{n_o}^{(2)} \\ & \quad = -8N \sum_{n \neq n_o} K_{n_o n}^{(1)} a_n^{(1)} + 8N \sum_{n \neq n_o} L_{n_o n}^{(1)} b_n^{(1)} \\ & \Delta_M(A)a_{n_o}^{(0)} - \Delta_N(A)b_{n_o}^{(0)} - [A_o^2 J_l'(A_o)H_l'(A_o)+8NN_{n_o n_o}^{(0)}]b_{n_o}^{(2)} \\ & \quad = -8N \sum_{n \neq n_o} M_{n_o n}^{(1)} a_n^{(1)} + 8N \sum_{n \neq n_o} N_{n_o n}^{(1)} b_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

但し

$$\begin{aligned} \Delta_K(A) &= (J_l(A)H_l(A)+8NK_{n_o n_o}) - (J_l(A_o)H_l(A_o)+8NK_{n_o n_o}^{(0)}) \\ &= (J_l(A)H_l(A)+8NK_{n_o n_o})'(A-A_o) + \dots \end{aligned}$$

同様に

$$\left. \begin{aligned} \Delta_L(A) &= (A J_l'(A)H_l'(A)+8NL_{n_o n_o})'(A-A_o) + \dots \\ \Delta_M(A) &= (A J_l'(A)H_l(A)+8NM_{n_o n_o})'(A-A_o) + \dots \\ \Delta_N(A) &= (A^2 J_l'(A)H_l'(A)+8NN_{n_o n_o})'(A-A_o) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

但しここで ( )' は  $\left[ \frac{d}{dA} ( ) \right]_{A=A_0}$  を意味する。

(5.7) の右辺は (5.6) によつて既知であり、これから  $b_{n_0}^{(2)}$  および  $A$  が決定される。これによつて求められる補正がモード変換を考慮した近似解を与える。(5.8) で与えられる  $\Delta(A)$  は  $A$  の函数として (5.7) を解き難い形にしているから (5.8) は  $(A-A_0)$  の巾に展開して (5.7) に用いることが出来る。巾の1次までの展開を使うならば (5.7) は  $b_{n_0}^{(2)}$ ,  $(A-A_0)$  の線型連立方程式であつて直ちに求められるが、 $(A-A_0)^2$  まで解こうとするといくらか複雑である。

### § 3 回折損失，共振周波数

モード変換を考慮しない近似解を求める。その為に (5.5) の特性行列方程式

$$\begin{vmatrix} J_l(A)H_l(A)+8NK_{nn} & AJ_l(A)H_l'(A)+8NL_{nn} \\ AJ_l'(A)H_l(A)+8NM_{nn} & A^2J_l'(A)H_l'(A)+8NN_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.9)$$

の根を求めなければならない。(5.9) および以下この節では  $A_0, n_0$  を便宜上単に  $A, n$  と書く。(5.9) は函数方程式である。(5.9) を書きかえれば

$$\begin{aligned} 8N(K_{nn}N_{nn}-L_{nn}M_{nn})+J_l(A)H_l(A)N_{nn}-AJ_l'(A)H_l(A)L_{nn} \\ -AJ_l(A)H_l'(A)M_{nn}+A^2J_l'(A)H_l'(A)K_{nn}=0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。

今は、(5.2) の成立つ場合で

$$\alpha^2 A^2 \ll 1, \quad \alpha^2 = \frac{1}{4\pi N} \quad (5.11)$$

の場合を考えることにすれば、行列要素  $K_{nn}$  等には (4.62) (4.65) (4.68) で用意した  $\alpha^2 A^2$  の巾展開を用いることが出来る。これらを (5.10) に代入し、Bessel 函数の Lommel 公式<sup>83)</sup> 等を用いて  $\alpha$  の昇巾の順に整理すれば

$$\begin{aligned} J_l(A)H_l(A)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3\pi^2}+\frac{1}{2\pi}\right)(1-i)\alpha \\ -i\frac{1}{3}\{A^2J_l(A)H_l(A)+AJ_l'(A)H_l(A)+AJ_l(A)H_l'(A)+2A^2J_l'(A)H_l'(A)\}\alpha^2 \\ +O(\alpha^3)=0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

となる。 $0(\alpha^3)$ は $\alpha^3$ 以上の巾を含む項を意味する。

この方程式から次のことが明らかである。即ち  $\alpha \rightarrow 0$  あるいは (5.11) によつて  $N \rightarrow \infty$  の極限では (5.12) の根は  $J_l(A)H_l(A)=0$ , すなわち

$$J_l(A_{lm})=0 \quad (l, m=0, 1, 2, \dots) \quad (5.13)$$

を満足する Bessel 函数の根  $A_{lm}$  に等しくなる。これは閉じた空洞共振における境界条件  $\varphi(S)=0$  を満たすことを示している。これは第2章の空洞理論における0次近似の仮定, すなわち  $N$  が十分大きいとき Fabry Perot 共振は空洞共振像で近似できることの数学的証明である。今まで用いてきた量子数  $l, n$  は導波管モードを指定するものであつたが, (5.13) で定義される  $m$  を付加えたものは Fabry Perot 共振器の自由振動モードを指定する量子数であるとみなすことが出来る。

近似解: (5.12) の根は (5.13) (5.11) を考慮すれば

$$A=A_{lm}(1+\delta), \quad (|\delta| \ll 1) \quad (5.14)$$

とにおいて Bessel 函数を  $A=A_{lm}$  の近傍で展開して  $\delta$  を近似的に求めることが出来る。 $\delta$  を  $\alpha^2$  の次数の項まで求めることにする。その為には (5.12) の  $\{ \}$  の中は  $A=A_{lm}$  とおいて十分であり, 又第1項  $J_l(A)H_l(A)$  は  $\delta$  につき2次まで展開する必要がある。このようにして(附録5.1)。

$$\begin{aligned} \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4} \right) (1+i)\alpha + i\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \alpha^2 + 0(\alpha^3) \\ &= -0.5793(1+i)\alpha + 0.6689i\alpha^2 + 0(\alpha^3) \end{aligned} \quad (5.15)$$

がえられる。 $\alpha^2$  の項はわずかにモード  $(l, m)$  に依存するが, それは無視することにする。 $\alpha^3$  の項はモードに依存し複雑である。

根  $A$  を複素平面上にプロットしたものを図5.1に示す。

共振周波数, 回折損失: 以上によりモード  $(l, m)$  に対応する複素共振周波数は(4.32)によつて

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{a} \sqrt{\left( \frac{n_0 \pi a}{L} \right)^2 + A_{lm}^2 (1+\delta)^2} \\ &= \frac{1}{L} \left[ n_0 \pi + \alpha^2 A_{lm}^2 (1+2\delta+\delta^2) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

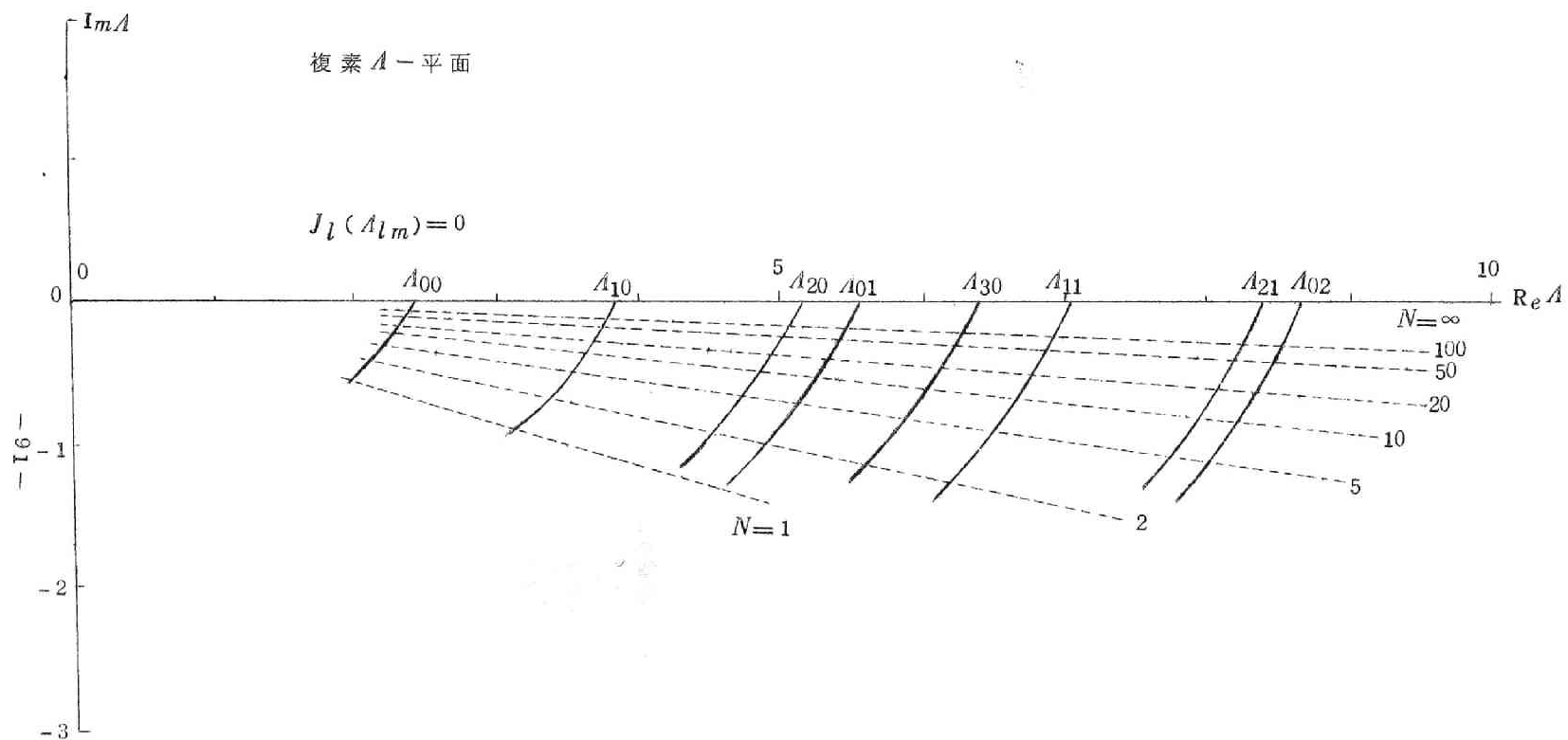


図 5. 1 特性方程式の根  $A$  の軌跡 ( パラメタ  $N$  )



となる。第1項は平面波共振に対応する項であり第2項は開口補正である。

共振周波数の変化は

$$\Delta\omega = \frac{n_0\pi}{L} - \omega = -\frac{\alpha^2 A_{lm}^2}{L} [1 + R_e(2\delta)] \quad (5.17)$$

で与えられる。右辺第1項は空洞共振モードの平面波共振よりの周波数のずれに対応する((2.75)参照)。尚(5.17)の $\Delta\omega$ の定義は(2.18)あるいは(2.64)の定義とは少し異なっている。第2章では $\Delta\omega$ は空洞共振周波数よりのずれとして定義されたがこれは(5.17)の第2項のみに対応するものである。

回折損失 $\delta_d$ は(2.17)(2.20)に対応して

$$\delta_d = -2L I_m(\omega) = -2\alpha^2 A_{lm}^2 I_m(2\delta + \delta^2) \quad (5.18)$$

で与えられる。(5.11)(5.15)により Fresnel 数 $N$ であらわせば

$$\begin{aligned} \delta_d &= 5.202 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} - 2.544 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-2} \\ &= 5.202 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} (1 - 0.4891 \cdot N^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

となる。これを図5.2に示す。

比較の為に Vainshtein<sup>46)</sup>の結果を(5.19)の形に書けば

$$\begin{aligned} \delta_d &= 8 A_{lm}^2 \frac{\beta(M+\beta)}{[M^2 + 2\beta M + 2\beta^2]^2} \simeq \frac{\beta}{M^3} (1 - \frac{3\beta}{M}) 8 A_{lm}^2 \\ &= 5.23 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} (1 - 0.493 N^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

但し  $\beta = 0.824$  ,  $M^2 = 8\pi N$

であつて、(5.19)と(5.20)とは非常によく一致している。これらは共に開口面におけるモード変換即ち $n_0$ と $n$ との結合を無視して得られた結果である。これらは Fox, Li の数値計算の結果<sup>17)</sup>をもよく再現する。 $N < 5$ になればその様なモード変換の損失に対する効果も無視出来ないで、そのような補正を考慮すれば更によく一致する可能性があるが、いずれにしても(5.19)はかなりよく合っており、又回折損失を精密化することは本質的な

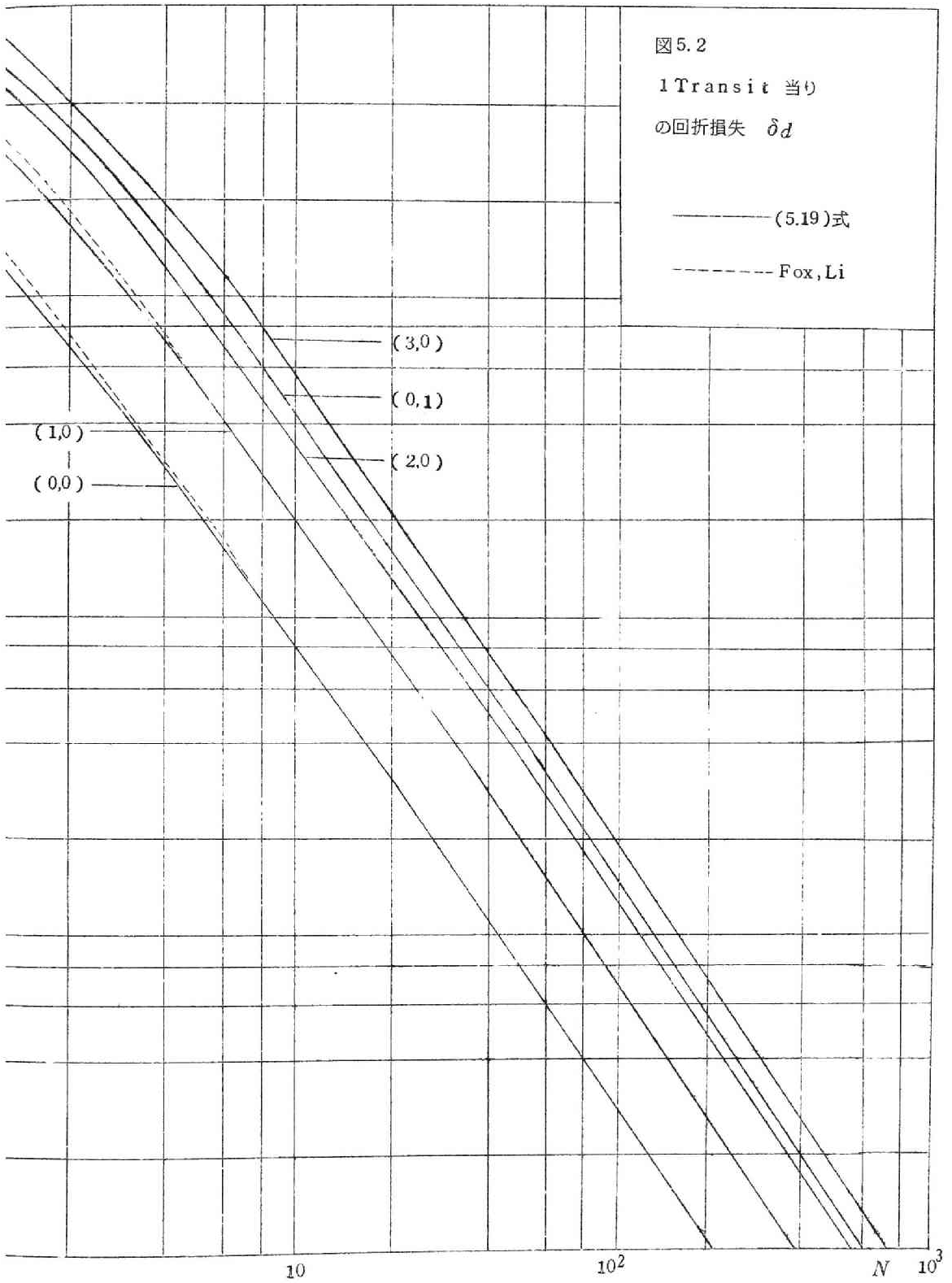
図 5.2

1 Transit 当り

の回折損失  $\delta_d$

—— (5.19)式

--- Fox, Li



重要性をもつわけでもないで、(5.19)で満足することにする。尚(5.19)の第1項のみに対応する種々の結果の比較は既に第2章§7で行っている。又、 $\delta_d$ の定義(5.18)は損失のかなり大きいところではFox, Liの干渉計理論による定義とずれを生ずるので図5.2ではその考慮を行つてプロットされている。

#### §4 場の分布

自由振動モードの場の分布は(5.1)～(5.7)によつて $A_n, \{a_n\}, \{b_n\}$ が求められれば、(4.23)によつて内部の場は

$$\varphi_i(X) = \frac{i\pi}{2} \sum_n \{H_l(A_n) a_{nl}^{\pm} - A_n H'_l(A_n) b_{nl}^{\pm}\} J_l(A_n \frac{r}{a}) \left\{ \frac{\cos l\theta}{\sin l\theta} \right\} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (5.21)$$

で与えられる。 $l, \pm$ は一定としているから和は $n$ についてのみとられる。 $n=n_0$ の項を0次近似として取出し、 $n \neq n_0$ については1次近似で止めるならば

$$\begin{aligned} \varphi_i(r, \theta, Z) = & \frac{i\pi}{2} \{H_l(A_0) a_{n_0}^{(0)} - A_0 H'_l(A_0) b_{n_0}^{(0)}\} J_l(A_0 \frac{r}{a}) \left\{ \frac{\cos l\theta}{\sin l\theta} \right\} \sin\left(\frac{n_0\pi z}{L}\right) \\ & + \frac{i\pi}{2} \sum_{n \neq n_0} \{H_l(A_n) a_n^{(1)} - A_n H'_l(A_n) b_n^{(1)}\} J_l(A_n \frac{r}{a}) \left\{ \frac{\cos l\theta}{\sin l\theta} \right\} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

こゝに $\{a_n^{(1)}\}, \{b_n^{(1)}\}$ は(5.6)の解として与えられ、又 $A_0$ は行列方程式の根(5.14)で与えられる。即ち

$$A_0 = A_{lm}(1 + \delta) \quad (5.23)$$

$$A_n^2 = (A_0)^2 + (n_0 - n) \pi \alpha^{-2} \quad (5.24)$$

場の分布として知るべきものは $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=0,L}$ であるが、級数は非常に大きい数 $n_0$ の近傍のみの和として十分速く収束するから、微分によつて出る $\frac{n\pi}{L}$ は和の中で常数としてよく、したがつて場の分布としては(5.22)で $\sin \frac{n\pi z}{L}$ の項はおとしたものを考えればよい。又動径方向の場の分布のみに注目するならば角部分の因子もおとして考えることが出来る。

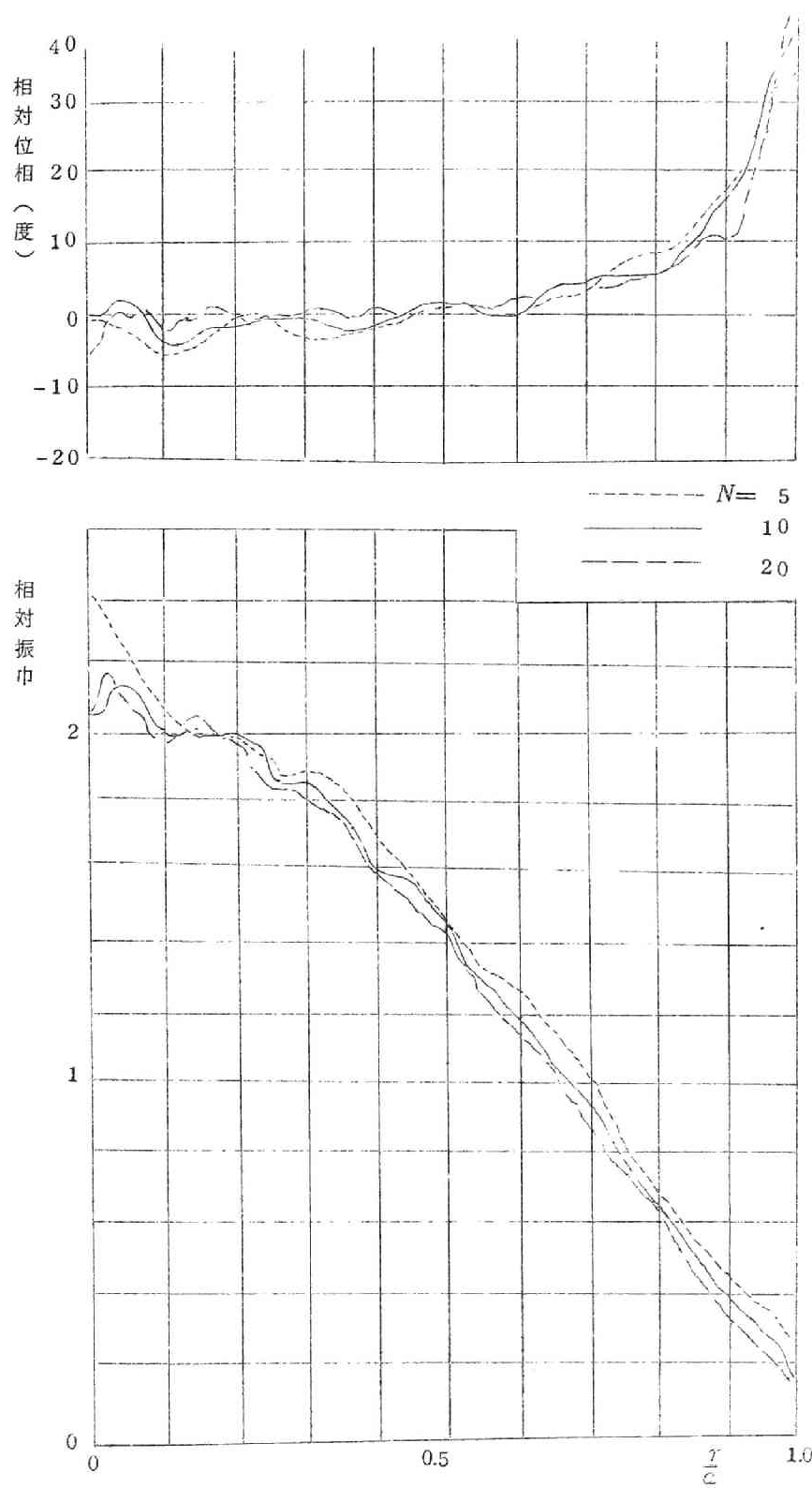


図 5.3.1  
種々の Fresnel  
数に対する場の  
分布  
(0,0モード)

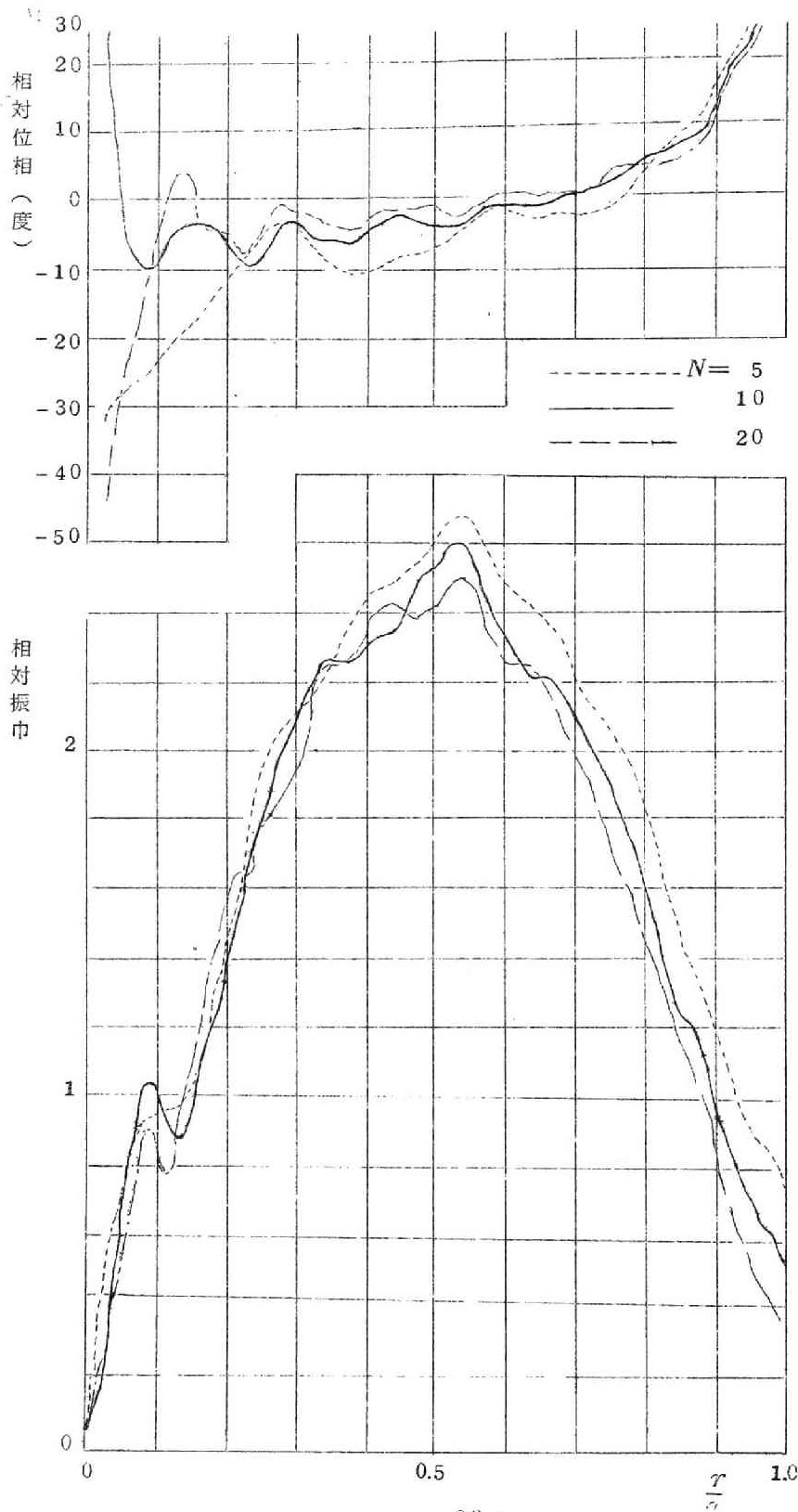


図5.3.2  
 種々の Fresnel  
 数に対する場の  
 分布  
 (1,0モード)

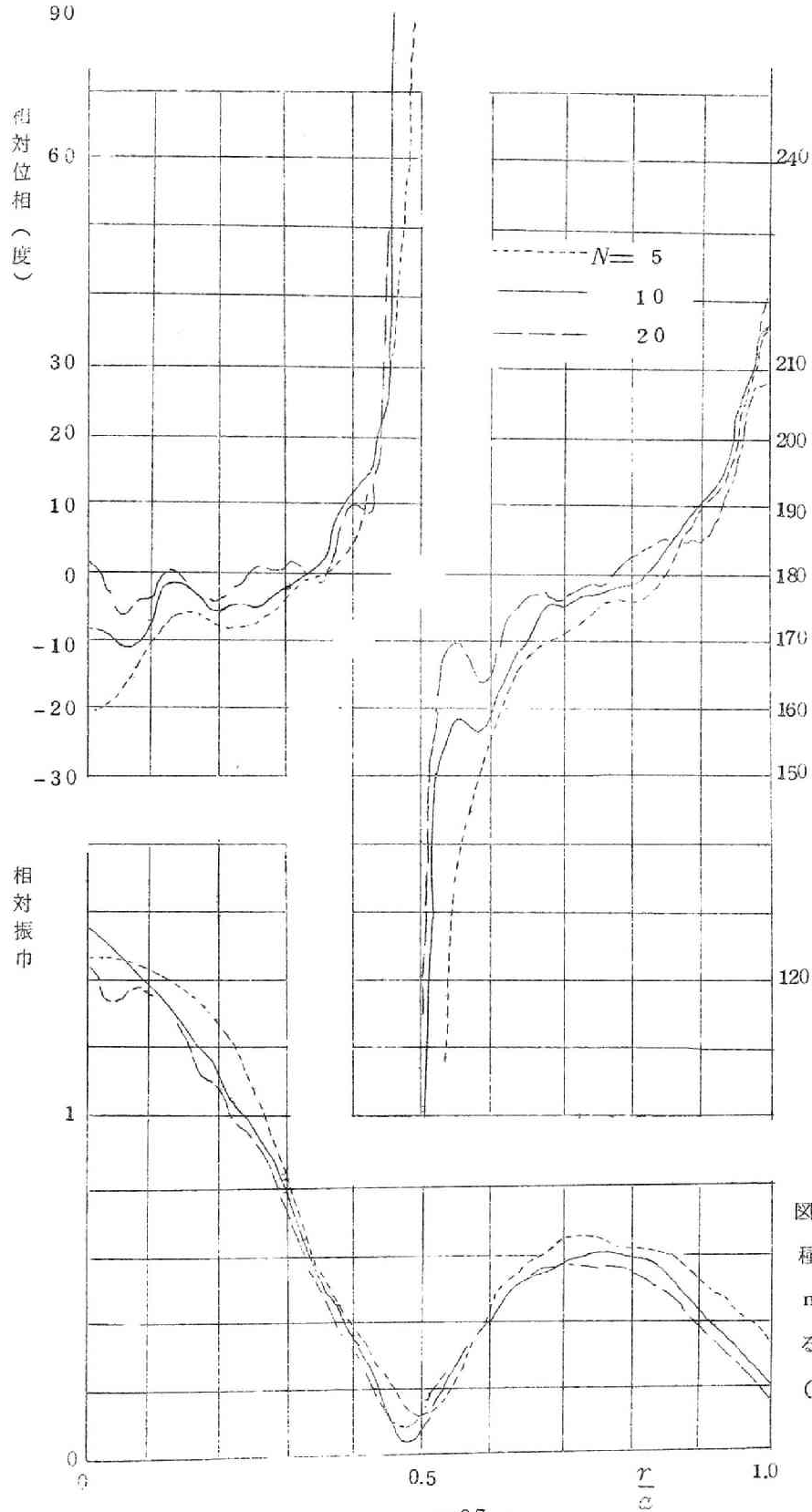


図 5.3.3  
種々の Fres-  
nel 数に対す  
る場の分布  
(0,1) モード

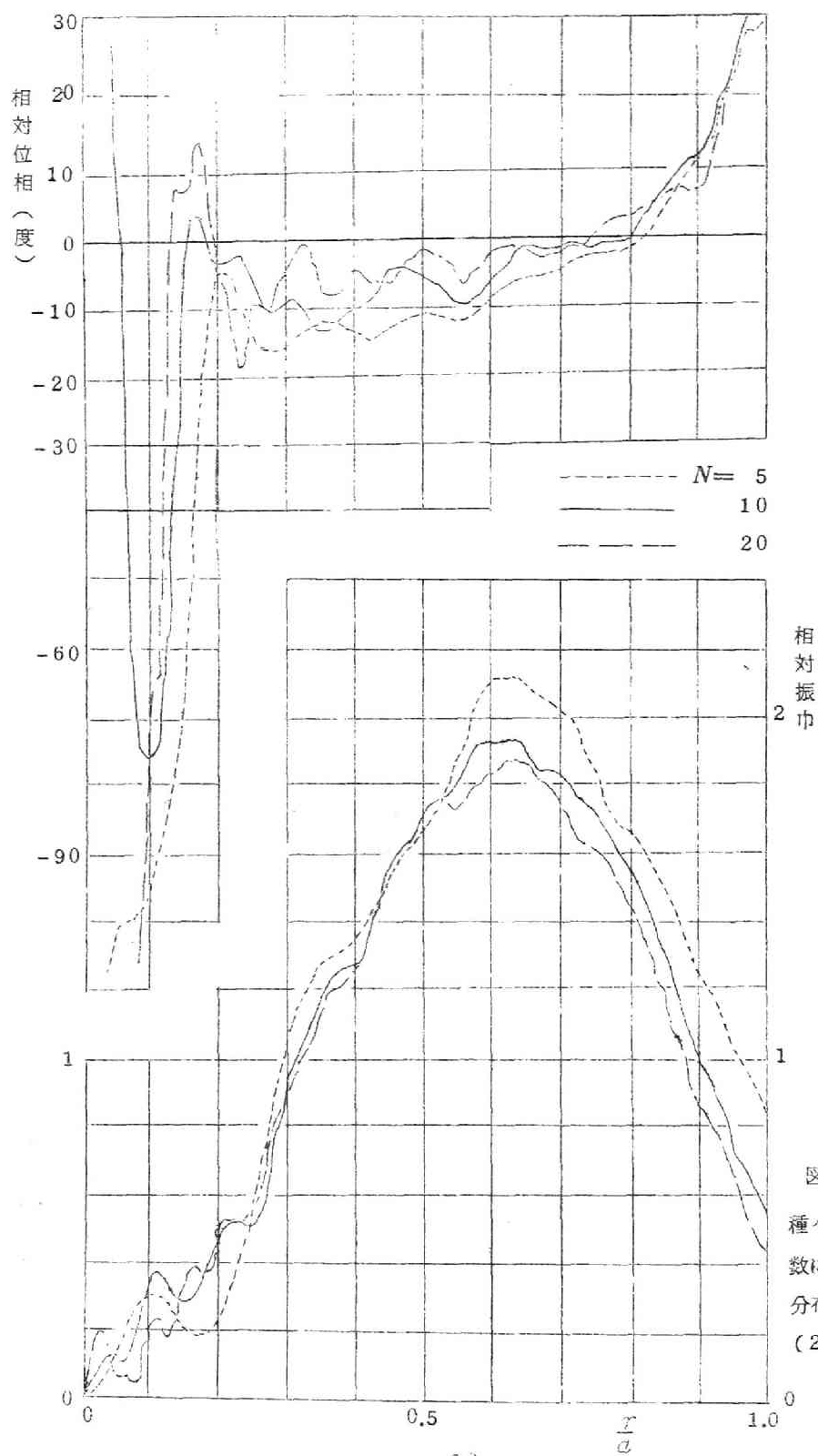


図 5.3.4  
種々の Fresnel  
数に対する場の  
分布  
(2.0) モード

(5.22) で第1項のみの近似, すなわちモード変換を考慮しないならば, その動径方向の場の分布は(5.23)を用いて

$$[\varphi]_z \propto J_l(A_{lm} \frac{r}{a}) \simeq J_l(A_{lm} \frac{r}{a}) + \delta A_{lm} \frac{r}{a} J_l'(A_{lm} \frac{r}{a}) \quad (5.25)$$

で与えられるが, この複素数値函数としての場の分布の絶対値ならびに位相が対応するモードの相対振巾, 相対位相分布である。この近似によるモードのパターンは Vainshtein<sup>46)</sup> が描いたものと一致する。又更に(5.22)の第2項, 即ちモード変換の効果も取り入れるならば Fox, Li のシミュレーションで見出した様な場の分布に細かいリツプルがあらわれる。

図5.3.1~4は(5.22)を上記の理由によつて単にz部分, 角部分を落として相対振巾, 相対位相の動径方向の分布を描いたものであつて, (0, 0)(1, 0)(0, 1)(2, 0)の4つのモードを Fresnel 数  $N=5, 10, 20$  に対してそれぞれ示している。図の計算において(5.22)の  $a_{n_0}^{(0)}, b_{n_0}^{(0)}, a_n^{(1)}, b_n^{(1)}$  を求める際には, まず(5.3)の0次近似で  $a_{n_0}^{(0)}=1$  とえらんで逐次計算を出発させ, (5.5)によつて  $b_{n_0}^{(0)}$  を, (5.6)によつて  $a_n^{(1)}, b_n^{(1)}$  ( $n \neq n_0$ ) を求めている。したがつて求められる場の分布では, 通常空洞の固有函数の規格化あるいは Fox, Li の様に場の振巾の最大値を1とする規格化は行っていない。同様に又相対位相も上の計算過程の結果として得られたものであるが, Fox, Li では振巾最大の点での位相を0と撰んでいる。勿論相対振巾, 相対位相であるから後に比較を行う時には規格化を合せている。

図5.3にあらわれる細かいリツプルは Fresnel 数が変わると移動又は変化するが, これは基本モードから高次モードへの変換係数が  $N$  が変わると変化し, その結果沢山の高次モードの干渉のために生ずるリツプルが移動又は変化することを示している。これらのリツプルは2, 3の高次モードのみによつて主として生じたのではなく非常に数多くのモードが関与していることが計算の結果示される。図5.3では38つのモードの和として計算したものであるが周辺部では  $n > n_0$  のモード, つまり遮断周波数以下のモードの寄与も大きくなるので更に数を増加して計算している。

## § 5 空洞理論の結果の批判

第2章においては空洞共振像にもとづいて共振モードの損失を求め(2.63)の様に

$$\delta_d = 2.40 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (5.26)$$



と云う結果を得た。これは上に求めた(5.19)の約半分であり、正確には後に示す様に(5.19)の第1項の  $8/3\pi + 8$  倍になっている。(5.26)は  $N \rightarrow \infty$  における閉空洞の境界条件  $\varphi(S) = 0$  を仮定し、その固有函数を無振動函数とし開口よりの輻射を振動として扱かつて輻射損失を求めたものである。(5.13)において示されたように、 $N \rightarrow \infty$  における境界条件  $\varphi(S) = 0$  が数学的に正しいにもかかわらずその損失の近似が良くないのは如何なる理由によるものかをここで考察する。

空洞理論では0次近似として境界面上で  $\varphi(S) = 0$  なる固有函数を探っているが、これは(4.15)で云えば  $\{b_{nl}^{\pm}\} = 0$  に対応する。したがって(5.5)又は(5.9)に対応して

$$J_l(A)H_l(A) + 8N K_{nn} = 0 \quad (5.27)$$

なる方程式を考えることになる。 $K_{nn}$  の  $\alpha$  についての展開式(4.62)および(5.11)の關係を用いると

$$J_l(A)H_l(A) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3\pi^2} (1-i)\alpha = 0 \quad (5.28)$$

の根を求めることになる。但しここで  $\alpha^2$  以上の項は簡単のために無視した。(5.14)のように

$$A = A_{lm}(1+\delta), \quad (|\delta| \ll 1) \quad (5.29)$$

とにおいて前と同様に取扱えば

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3\pi} (1+i)\alpha \quad (5.30)$$

となり、対応する回折損失は(5.18)から

$$\delta_d = \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} = 2.388 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \quad (5.31)$$

となつて(5.26)の結果がえられる。数字が少し異なるのは(5.26)を求める時に行つた行列要素の数値積分の誤差のためである。

ここで(5.30)と(5.15)とを比べて見る時、 $\alpha^2$  の項を無視するならば、後者は前者において  $\frac{2}{3\pi} \rightarrow (\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4})$  の置きかえをしたものであることがわかる。したがって差はこの  $\frac{1}{4}$  から生じているのであるが、この出所は(5.10)から(5.12)を導びくときに  $L_{nn}$ ,  $M_{nn}$  の項より生じているのである。(5.9)の特性行列式が(5.27)と近似的に同等であ

るためには (5.10) から明らかなように  $K_{nn} \gg L_{nn} M_{nn} / N_{nn}$ , ならびに  $8 N$   
 $K_{nn} \gg L_{nn} / N_{nn}, M_{nn} / N_{nn}, K_{nn} / N_{nn}$  であることが必要である。しかしなが  
 ら行列要素の展開式 (4.62) (4.65) (4.68) を代入すれば, 上の  $K_{nn} / N_{nn}$  をの  
 そいてこれらの項はすべて  $\alpha$  に関し同じ次数の項であつて上の不等関係は満たされないこと  
 がわかる。この事実は  $L_{nn}, M_{nn}$  を無視することが許されないことを意味するが, これは  
 同時に方程式 (5.5) において  $a_n, b_n$  間の結合が, あるいは云いかえれば  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \varphi$   
 間の結合がいかに  $b_n$  又は  $\varphi$  が小さくとも無視しえないことを意味している。したがつてこ  
 れら 2 種の境界値の間の結合が無視されていたことが空洞理論における欠陥である, ことが明  
 らかにされた。

Bergstein, Schachter<sup>38)</sup> も干渉計像による積分方程式を, 空洞像に対応する周  
 辺で 0 値をとる函数系による Fourier-Bessel 展開によつて解き, まさに (5.31)  
 の結果を導びいている ((2.73) 参照)。これも同様な欠陥にもとづくものであることが明  
 らかである。

空洞理論において上にのべた結合を考慮することは次の意味で難点がある。そこでは固有函  
 数としては開口面上で  $\varphi=0$  の境界条件を満足するものを使用したが, その代りに混合境界  
 条件  $\varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$  を満たす固有函数を用いることにより上の 2 種の境界値間の結合を考  
 慮することが出来る。しかしながら  $\alpha$  の値に任意性があること, 又この様な混合境界条件を  
 満たす固有函数とその固有値をすべて求めることは現実の計算として遂行することが困難であ  
 る。又この様な結合を直接に考慮するのではなく, 空洞理論において高次の摂動を計算するこ  
 とが考えられる。第 2 章では回折損失を輻射摂動行列 (3.17) の対角要素の虚部として求め  
 ている。これは 1 次摂動の取扱ひであるが, 非対角要素を考慮した 2 次摂動固有値を計算して  
 近似をあげうる可能性がある。その時摂動の級数において行列  $I_{\mu\nu}$  には近似式 (3.19)  
 ではなく完全な式を用いなければならないが, それは第 4 章 § 3 の  $K_{nn'}$  の計算と同様に  
 して求めることができる。しかしながら  $I_{\mu\nu}$  が与えられてもそれは  $N$  の函数であり, しか  
 も 2 次摂動項としてその無限函数項級数の和をあらわに求めることは更に困難である。結局  $N$   
 の各値に対して数値和をとることになるであろう。又空洞理論では場の分布は 0 次近似以外  
 には与えなかつたが, (5.22) に対応するものは原理的には 1 次摂動を用いて求めることが  
 出来る。もし和を量子数  $m$  について完全に求めることが出来たとすれば (5.25) に近い場  
 の分布がえられる筈であるが, 収束の点で正しく求めることが期待出来ない。更に (5.22)  
 の第 2 項に対応して場のリツブルまで求めようとすれば摂動級数は量子数  $m, n$  に関する 2

重級数和を計算する必要があるが、これは函数項級数であることから殆んど実行不能である。

空洞理論は描像が簡単で、取扱いにらびに応用が容易に行えることが特徴であるが、上にのべた様な精密化の手続きにおいては本章の導波像に基づく理論と比較して非常に困難であることがわかる。

## § 6 考 察

### Fox, Li との比較

回折損失  $\delta_d$  については既に図 5.2 で比較されているが、モード変換を考慮しない近似で (5.19) を求めたにも拘らず一致は良好である。図 5.4.1, 2 においては場の振巾分布ならびに位相分布を Fox, Li のシミュレーションの結果と図 5.3.1, 2 の結果とを比較する。こゝでは  $N=10$  の場合を選び、振巾の最大値および位相の零点を一致させてある。更にモード変換を考慮しない場合として (5.22) の第 1 項又 (5.25) によつて求めた位相ならびに振巾分布も同時に示したがこの項のみで場の分布の傾向がかなりよくあらわされていることがわかる。本章の結果 (5.22) からは図 5.4.1~4 に示したように種々のモードに対応するものが得られるが、Fox, Li は (0, 0), (1, 0) モードの 2 つしか求めている。恐らく他のモードはシミュレーションによつては発見されなかつたのであらうと思われる。それは  $N$  が比較的小さくてしかも高次モードであれば、図 5.2 から明らかなように損失がかなり大きく、反復代入法によるシミュレーションでは一定の共振モードを見出すことが難かしいからである。

図の  $N=10$  に対する比較は殆んどよい一致を示している。シミュレーションでは  $N=2, 5, 10$  の 3 つの場合について求められているが、(5.22) によつて  $N=2$  の場合を計算すると分布にいくらかずれがあらわれる。これは第 4 章 § 3 で行つた行列要素の計算において  $N \gg 1$  に対する近似を行なつたためであつて、図 5.2 の回折損失のわずかの不一致と同じ原因である。又振巾の絶対値が小さいところ、たとえば図 5.4.2 の (1, 0) モードの  $r=0$  の近傍では位相分布にいくらか差があらわれている。一般に絶対値が小さくなると共に位相の意義も減少するが、位相そのものの計算精度もおちるからである。(5.22) は (5.6) による 1 次近似の計算でとめているが、更に (5.7) を解いて 2 次近似をも行えばよりよく一致するものと期待される。しかしながら大きい  $N$  に対してはモード変換は減少するはずであるから (5.22) の近似で十分正確である。

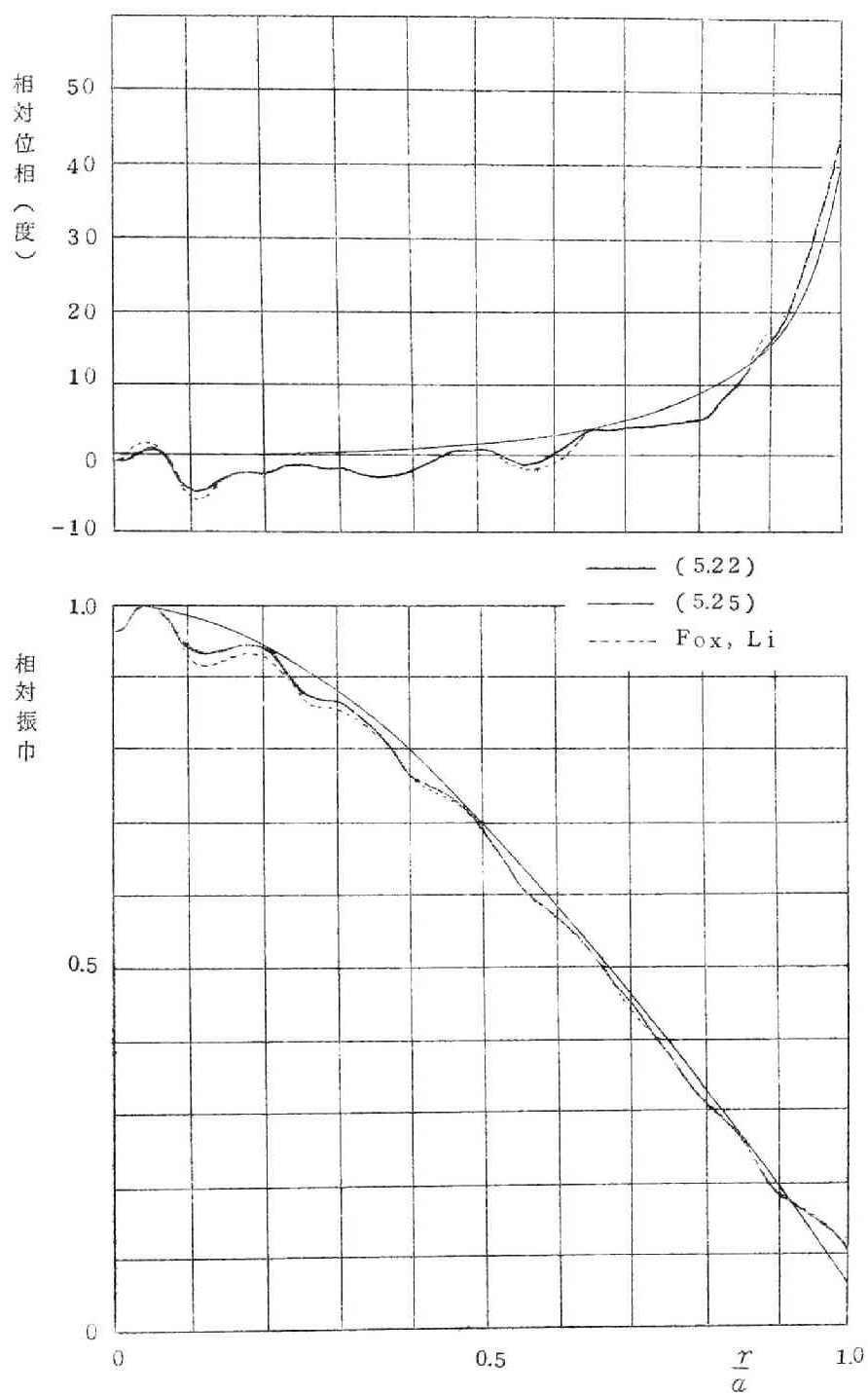


図5.4.1 Fox, Li のシミュレーションによる  
結果との比較

(0,0)モード,  $N=10$

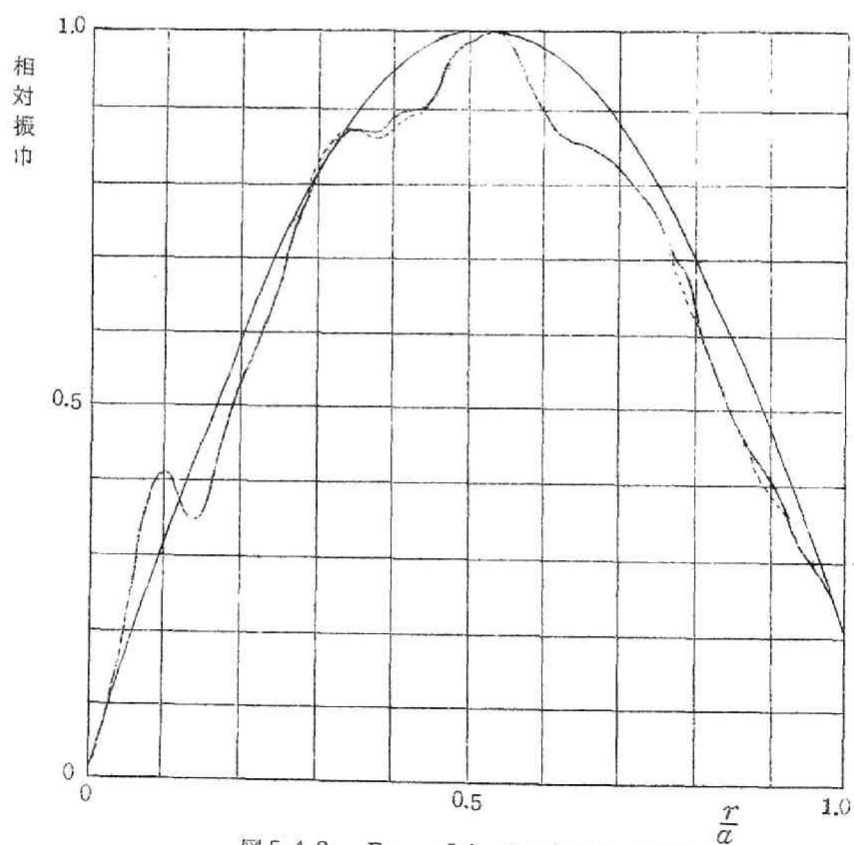
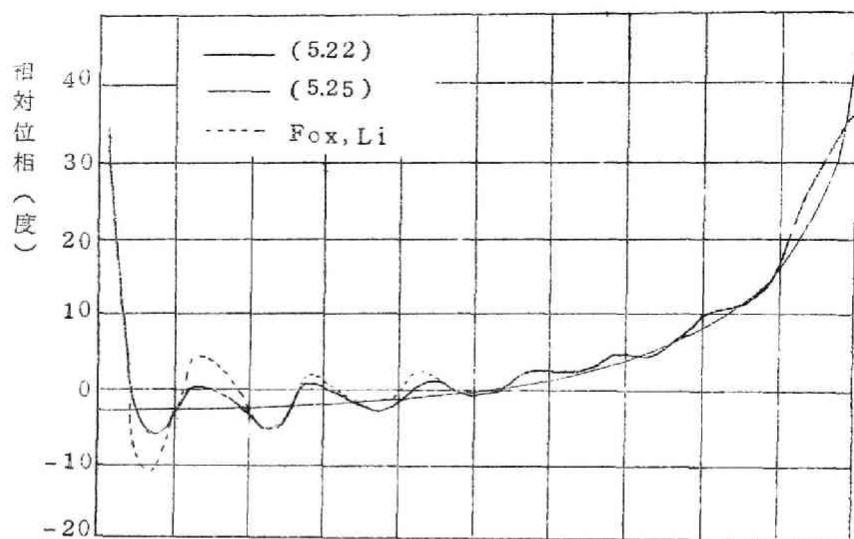


図 5.4.2 Fox, Li のシミュレーション

による結果との比較

- 104 - ( 1.0 ) モード,  $N=10$

### 自由減衰振動モードの意義について

従来の Fabry Perot 共振器の研究はすべて本章で取扱つたような自由振動モードを対象としている。既にのべたように自由振動モードの研究は元来励振問題などの一般的な問題の前段階として必要なのであつて、マイクロ波空洞の理論では励振の場は固有振動モードによつて展開される。その場合固有周波数は実でありしかも空洞の損失は非常に小さいのが普通であるから実周波数による励振の様子はかなり広範囲の周波数にわたり自由振動の知識のみで予想することが出来る。

Fabry Perot 共振器のような開口共振器の問題において上の理論との類比により自由減衰振動モードによつて場を展開するものとすれば、図 5.3 に示した様な自由振動モードの場の分布をすべて求める必要が生ずる。しかしながらその様な理論は次の理由で困難である。まず自由減衰振動モードによる展開形式の数学的理論が難かしい問題であること、次にその様なモードをすべて求めることが實際上難かしいことである。第 4 章でのべた励振理論ではかかる難点はすべて回避され、自由減衰振動モードを知ることなく励振問題を解析することが出来る。したがつて上に求められたようなモードの場の分布を実際にすべて見出すことは必要なことではない。更に又図に求められたモードの場の分布は現実には正確にあらわれることが殆んどないものである。それは図 5.1 に見られるように共振周波数は複素周波数であるが現実の励振は実周波数で行われるからである。そのために励振周波数がモードに対応する複素周波数の極く近傍にある時には場の分布は上のモードの分布に近いものになるが、遠ざかれば分布の形はかなり変化をうける。又対応するモードの損失が大きいほど上の場の分布は正確には再現されない。同様に複素周波数によつて定まる損失は励振曲線の共振の半値巾によつて近似的に意味をもつが損失の大きい場合には意義を失う。これらのことは実際に励振問題を取扱つて第 4 章の (4.23) (4.29) を計算することにより確かめられる。

以上によつて従来の自由振動モードの研究ならびに本章で求められた自由減衰振動の回折損失、場の分布は正確には上記の意味において受けとられるべきである。

## 第 6 章 自由減衰振動モードⅡ（鏡面変形）

### § 1 鏡面変形

前章では完全に平行な円形平行平面鏡共振器の自由振動の問題を無励振の場合として取扱ったが、ここでは鏡面にわずかな変形がある場合の自由振動を同様に励振理論の立場から考察する。第 3 章において既に平行平面共振器に空洞理論を適用してわずかに変形がある場合の回折損失の変化をしらべた。平行平面共振器に対する変形の問題は Fox, Li<sup>17)</sup> による数値的解析が無限長ストリップなどに対して行われたが、理論的な解析は空洞理論によるもの以外は未だ発表されていない。これに反し共焦点球面共振器については 2, 3 の解析<sup>10) 53)</sup> がなされている。しかしながら前章でも考察を行つたように空洞像は簡単ではあるが一つの仮定であつて変形の存在する場合にもなお且つよい 0 次近似であるかどうか不明であり、又そこで求められた定量的な結果も比較しうる他の理論的結果が存在しなかつた。前章では励振理論による厳密な取扱いによつて平行平面共振器に対して Fox, Li とほぼ完全に一致する結果を得たが、鏡面変形に対してもこの励振理論を適用して前に得た空洞像の結果と比較することは有意義である。又この理論は 0 次近似に対する仮定を含まない理論であるから結果に信頼性がある。

励振理論による鏡面変形の取扱いは次の順序で行われる。変形のある場合に方程式にあらわれる変形項を等価励振源におきかえる。変形のある場合には解くべき方程式は等価励振源の入つた基礎方程式と、変形鏡面上における場の無矛盾条件とを連立させたものであるが、無矛盾条件を基礎方程式に代入して消去することにより、基礎方程式は角量子数  $l$  の異なるモードに対する連立方程式とする。この連立方程式は無励振の場合には斉次方程式となるから、この特性行列式の根を求めることにより、その虚部から回折損失が求められる。変形を十分小さいとし、傾斜変形の場合に対して、解を変形の 2 乗の項まで求める近似を行う。計算自体は空洞理論と比較すればかなり複雑であるが、求められる結果は (6.6 2) であつて、第 3 章の結果 (3.4 0) と定性的には全く一致する。係数は表 6.1 に掲げる。このことによつて、空洞理論はこのべる取扱いと比べれば簡単であるが大体において誤つた結果に導びかないことが確認される。

## § 2 基礎方程式

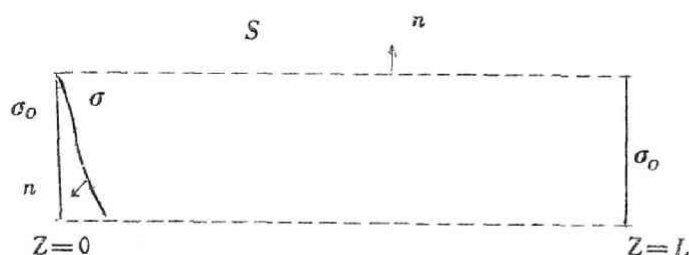


図 6.1 変形した Fabry Perot 共振器

第4章§2と同様の考え方で取扱うことが出来る。今の場合自由振動を考えているので励振項はないが、その代りに鏡面変形による項があらわれる。変形した鏡面  $\sigma$  上では (4.2) に対応し

$$\varphi(X)=0, X: \sigma \text{ 上} \quad (6.1)$$

であるとする。

内部の場合： Green 函数は (4.11) で与えられた変形しない面  $\sigma_0$  上で境界値 0 をとるものを用いる。その時内部の場合は Green の定理によつて

$$\varphi_i(X) = \int_{\sigma} G(X|X') \frac{\partial \varphi(X')}{\partial n'} d\sigma + \int_S \left[ G(X|X') \frac{\partial \varphi(X')}{\partial r'} - \frac{\partial G(X|X')}{\partial r'} \varphi(X') \right] dS \quad (6.2)$$

で与えられる。変形による  $S$  の変化は小さいから無視する。

等価励振源： (6.2) では (4.5) と比べるとわかるように励振項  $-\int_{\sigma_0} \frac{\partial G}{\partial n} \varphi d\sigma$

の代りに変形による振動項  $\int_{\sigma} G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} d\sigma$  があらわれている。この項の  $S$  における値、および法線微分は

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sigma} G(a|X') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} d\sigma &= \frac{i}{2L} \sum_{n,l \pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \varepsilon_l \begin{Bmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{Bmatrix} H_l(A_n) \int_{\sigma} u_{nl}^{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \\ \frac{\partial G(a-0|X')}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} d\sigma &= \frac{i}{2L} \frac{1}{a} \sum_{n,l \pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \varepsilon_l \begin{Bmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{Bmatrix} A_n H_l'(A_n) \int_{\sigma} u_{nl}^{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \right\}$$



但し

$$u_{nl}^{\pm}(r, \theta, z) \equiv J_l(A_n \frac{r}{a}) \left\{ \begin{matrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{matrix} \right\} \sin \left( \frac{n\pi z}{L} \right) \quad (6.4)$$

となる。結局、第4章で連続条件(4.9)(4.10)から基礎方程式(4.17)を導出する過程において励振項として(6.3)を用いて行つたと考えるならば、これは(4.19)で定義した励振強度を与える  $\psi_{nl}^{\pm}$  として、(4.19)の右辺の代りに

$$\psi_{nl}^{\pm} = \frac{1}{n\pi} \frac{L}{a^2} \int_{\sigma} u_{nl}^{\pm} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \quad (6.5)$$

と置換えたことと等価である。従がつて  $S$  面上の連続条件は(6.5)を(4.17)に用いたものと同じである。

連続条件： (4.17)に(6.5)を用いたものとして再掲すれば

$$\left. \begin{aligned} & 2\epsilon_l NH_l(A_n)\psi_{nl}^{\pm} + J_l(A_n)H_l(A_n)a_{nl}^{\pm} - A_n J_l(A_n)H_l'(A_n)b_{nl}^{\pm} \\ & = 8N \left\{ - \sum_{n'} K_{nn'} a_{n'l}^{\pm} + \sum_{n'} L_{nn'} b_{n'l}^{\pm} \right\} \\ & 2\epsilon_l N A_n H_l'(A_n)\psi_{nl}^{\pm} + A_n J_l'(A_n)H_l(A_n)a_{nl}^{\pm} - A_n^2 J_l'(A_n)H_l'(A_n)b_{nl}^{\pm} \\ & = 8N \left\{ - \sum_{n'} M_{nn'} a_{n'l}^{\pm} + \sum_{n'} N_{nn'} b_{n'l}^{\pm} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (n, l = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

無矛盾条件： 変形した鏡面  $\sigma$  上における  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  の値は未知函数であるが、(6.2)であらわされた内部の場  $\varphi_i$  によつてこの鏡面上での  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  の値を計算する時それは(6.2)の右辺の積分の中に用いられている  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  を再現しなければならない。これをこゝでは無矛盾条件と呼ぶことにする。即ち(6.2)から  $\sigma$  上において

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} = \int_{\sigma} \frac{\partial G(\sigma|X')}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} d\sigma + \int_S \left[ \frac{\partial G(\sigma|X')}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial r'} - \frac{\partial^2 G(\sigma|X')}{\partial n \partial r'} \varphi(X') \right] dS \quad (6.7)$$

が要求される。但しこゝでは  $\varphi_i$  を単に  $\varphi$  と書いた。(6.7)の第2項の積分で  $S$  上の  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ,

$\varphi$  の値を (4.15) (4.16) の展開を用い、更に (4.11) を用いて積分すれば第2項は  $\{a_{nl}^{\pm}\} \{b_{nl}^{\pm}\}$  で書けるから、(6.7) は

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} = \int_{\sigma} \frac{\partial G(\sigma | \bar{K}')}{\partial n} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right]_{\sigma} d\sigma \\ + \frac{i\pi}{2} \sum_{n, k \pm} \{ H_k(A_n) a_{nk}^{\pm} - A_n H'_k(A_n) b_{nk}^{\pm} \} \left[ \frac{\partial u_{nk}^{\pm}}{\partial n} \right]_{\sigma} \quad (6.8)$$

ともあらわされる。

近似解法： 以上により解くべき問題は (6.5) (6.6) (6.8) を連立方程式とみなして

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} \{a_{nl}^{\pm}\} \{b_{nl}^{\pm}\} \text{ を決定することである。}$$

変形は波長に比して小さく、したがって変形の効果が小さいと考えられる時にはこれらの方程式を解くことは逐次近似法によつて行うことが出来る。前章と同様自由振動の回折損失に関するかぎり異なる  $n$  の間の結合はよい近似で無視してよいと考えられるから、以下では  $n$  は固定して書かないことにする。つまり前章と同様  $n = n_0$  のみに注目する。今考えているモードの角変数に対する量子数を  $l$  とし、一般のモードの角変数量子数は便宜上  $k$  と記す。しかるとき  $a_l^{\pm}, b_l^{\pm}$  は変形の 0 次の微小量とすると  $k = l$  以外の  $a_k^{\pm}, b_k^{\pm}$  等は 1 次の微小量であると考えられる。その時 (6.8) において 1 次の項までを問題にするならば、第 1 項は 1 次 第 2 項は 0 次 + 1 次の形であるから、第 1 項の積分における  $\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma}$  とし第 2 項における 0 次の項  $k = l$  を代入して (6.8) の右辺全体を  $\{a_k\} \{b_k\}$  のみであらわし、2 次以上の高次の項は無視することになると (6.8) は

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} = \frac{i\pi}{2} \{ H_l(A) a_l - A H'_l(A) b_l \} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial n} \right]_{\sigma} \\ + \frac{i\pi}{2} \sum_{k \neq l} \{ H_k(A) a_k - A H'_k(A) b_k \} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial n} \right]_{\sigma} \\ + \frac{i\pi}{2} \{ H_l(A) a_l - A H'_l(A) b_l \} \int_{\sigma} \frac{\partial G(\sigma | \sigma')}{\partial n} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \quad (6.9)$$

と書ける。第 1 項は変形について 0 次、第 2 項、第 3 項は 1 次の項である。こゝで  $a_k^{\pm}, b_k^{\pm}$

および和に関してすべて  $\pm$  の記号をおとしたが、これは後述する理由によつて  $\pm$  を固定して考えることが出来るからである。したがつて以下においても  $\pm$  をすべて書かないことにする。

(6.9) を (6.5) に代入すると  $\psi_l, \psi_k$  ( $k \neq l$ ) の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} u_l \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma &= \frac{i\pi}{2} \{ H_l a_l - \Lambda H'_l b_l \} \int_{\sigma} u_l \left[ \frac{\partial u_l}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \\ &+ \frac{i\pi}{2} \sum_{k \neq l} \{ H_k a_k - \Lambda H'_k b_k \} \int_{\sigma} u_l \left[ \frac{\partial u_k}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \\ &+ \frac{i\pi}{2} \{ H_l a_l - \Lambda H'_l b_l \} \int_{\sigma} u_l \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma | \sigma')}{\partial n} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial n'} \right] d\sigma d\sigma' \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} u_k \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma &= \frac{i\pi}{2} \{ H_l a_l - \Lambda H'_l b_l \} \int_{\sigma} u_k \left[ \frac{\partial u_l}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \\ &+ \frac{i\pi}{2} \sum_{k' \neq l} \{ H_{k'} a_{k'} - \Lambda H'_{k'} b_{k'} \} \int_{\sigma} u_k \left[ \frac{\partial u_{k'}}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \\ &+ \frac{i\pi}{2} \{ H_l a_l - \Lambda H'_l b_l \} \int_{\sigma} u_k \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma | \sigma')}{\partial n} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial n'} \right] d\sigma d\sigma' \end{aligned} \quad (k \neq l) \quad (6.11)$$

となるが、右辺には 2 つの型の表面積分があらわれる。傾斜変形に対してそれらの積分は次節 § 3 で計算されるが、結果を先に与えると

$$\int_{\sigma} u_k \frac{\partial u_{k'}}{\partial n} d\sigma \simeq \int_{\sigma} \frac{\partial u_k}{\partial n} u_{k'} d\sigma \simeq - \frac{2n\pi^2 K a^2}{L} D_{kk'} \quad (6.12)$$

$$\int_{\sigma} u_k(\sigma) \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma | \sigma')}{\partial n} \frac{\partial u_k(\sigma')}{\partial n'} d\sigma d\sigma' \simeq i \frac{2\pi^2 K^2 a^4}{L} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \Delta_{kk'} \quad (6.13)$$

の形である。 $K$  は傾斜変形のパラメタ、 $D_{kk'}$ 、 $\Delta_{kk'}$  は § 3 (6.22), (6.29) で与え

られる積分である。 $D_{kk'}$ は  $k'=k\pm 1$ , 又  $\Delta_{kk'}$ は  $k'=k, k\pm 2$  の時以外は0になる。すなわちそれぞれ転移則  $\Delta k=\pm 1, \Delta k=0, \pm 2$ をもっている。(6.12)(6.13)を(6.10)(6.11)に用いてこゝで必要とする近似の範囲において各項を評価する。

(6.10)の第1項は(6.12)によつて0となり, 第2項は  $k=l\pm 1$ のみが残る。(6.11)の第1項は  $k'=l\pm 1$ の時のみ0でなく, 第2項は  $k'=k\pm 1$ の時したがつて  $k'=l\pm 2, l\pm 3, \dots$ の時のみ0でない。(6.11)の第3項は(6.13)によつて  $k=l\pm 2$ の時のみ0でない。一方こゝで行う近似では, (6.9)においては $K$ の1次まで, したがつて(6.5)で与えられる  $\psi_k$  では2次までしか問題にしないが,  $\psi_k$  ( $k=l\pm 1$ )の2次の項は  $a_k, b_k$  によつて(6.10)を通じて $\psi_l$ に $K$ の3次の項を寄与するからこれは不要であり, 又(6.12)(6.13)から明らかなように(6.11)において  $k=l\pm 2$  とすれば  $a_{l\pm 2}, b_{l\pm 2}$  は $K$ の2次以上の項であるからこれを考えることも不要である。

以上によつて考えるモードに対し  $K$  の2次までの効果を考慮する近似においては(6.5)に(6.10)~(6.13)を代入して

$$\begin{aligned}\psi_l &= \frac{L}{n\pi} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma} u_l \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \\ &= -i\pi^2 K \sum_{k=l\pm 1} D_{lk} \{ H_k(A) a_k - A H'_k(A) b_k \} \\ &\quad - 2\pi^4 K^2 N \Delta_{ll} \{ H_l(A) a_l - A H'_l(A) b_l \} \quad (6.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_k &= \frac{1}{n\pi} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma} u_k \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\sigma} d\sigma \\ &= -i\pi^2 K D_{kl} \{ H_l(A) a_l - A H'_l(A) b_l \}, \quad (k=l\pm 1) \quad (6.15)\end{aligned}$$

とすることが出来, 其他の $k$ に対してはこの近似では0とおくことが出来る。

以上を考慮すれば, この近似においては,  $l, l\pm 1$ モードのみで閉じた方程式系が得られる。即ち(6.6)において異なる $n$ の間の結合を無視したものに(6.14)(6.15)を代入すれば

$$\left. \begin{aligned}
& [J_l(A)H_l(A) + 8NK_{nn}] a_l - [AJ_l(A)H'_l(A) + 8NL_{nn}] b_l \\
& = 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \Delta_{ll} H_l(A) [H_l(A)a_l - AH'_l(A)b_l] \\
& + i 2\pi^2 KN \varepsilon_l \sum_{k=l\pm 1} D_{lk} H_l(A) [H_k(A)a_k - AH'_k(A)b_k] \\
& - \\
& [AJ'_l(A)H_l(A) + 8NM_{nn}] a_l - [A^2 J'_l(A)H'_l(A) + 8NN_{nn}] b_l \\
& = 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \Delta_{ll} AH_l(A) [H_l(A)a_l - AH'_l(A)b_l] \\
& + i 2\pi^2 KN \varepsilon_l \sum_{k=l\pm 1} D_{lk} AH'_l(A) [H_k(A)a_k - AH'_k(A)b_k]
\end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

および  $k=l\pm 1$  に対し

$$\left. \begin{aligned}
& [J_k(A)H_k(A) + 8NK_{nn}] a_k - [AJ_k(A)H'_k(A) + 8NL_{nn}] b_k \\
& = i 2\pi^2 KN \varepsilon_k D_{kl} H_k(A) [H_l(A)a_l - AH'_l(A)b_l] \\
& - \\
& [AJ'_k(A)H_k(A) + 8NM_{nn}] a_k - [A^2 J'_k(A)H'_k(A) + 8NN_{nn}] b_k \\
& = i 2\pi^2 KN \varepsilon_k D_{kl} AH'_k(A) [H_l(A)a_l - AH'_l(A)b_l]
\end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

云うまでもなく、更に近似をあげて変形  $K$  に関し 4 次までを問題にすることにするならば  $l, l\pm 1, l\pm 2$  のモードに関して閉じた方程式系を取扱うことになるであろう。又 (4.17) のように電流分布による励振項も付加えるならば鏡の傾斜した場合の励振を取扱うことも可能であるが、その場合には一般にすべての  $l, n, \pm$  に対する方程式を考えねばならない。

(6.16) (6.17) を上の近似における鏡面変形の場合の自由振動の基礎方程式と呼ぶことにする。

±モードの分離： ここで (6.9) 以下 (6.16) (6.17) において  $\pm$  を固定した理由をのべる。±モードが方程式で分離していなければ基礎方程式では  $a_l, b_l, a_k, b_k$  ( $k=l\pm 1$ ) はすべて  $a_l^\pm, b_l^\pm, a_k^\pm, b_k^\pm$  であつて  $D_{lk}, \Delta_{ll}$  は後に与える (6.22)

(6.31)のように  $\pm$  間の結合を許すから、基礎方程式(6.16)(6.17)の右辺では  $k$  および  $l$  についての  $\pm$  の和をとらねばならず、又方程式は、 $\pm$ 、 $\pm$ 間にも連立して存在するから連立方程式の数は倍増することになる。したがってこの齊次方程式の特性行列式は12次元となる。

しかしながら次節でのべる計算((6.23)および附録3.2参照)からわかるように、(6.20)あるいは(3.21)で定義されたモードの軸と鏡面の最大傾斜線とのなす角  $\varphi$  が  $\varphi = 0$  であれば、 $\pm$ 、 $\pm$ モードつまり  $\cos$  モードと  $\sin$  モードとの間の結合は0となるので上の連立方程式系は、 $\pm$ 、 $\pm$ に関して分離し、解くべき特性行列方程式も因数分解して次数が半減することになる。一般には  $\varphi \neq 0$  の場合を取扱わねばならないが(6.23)の  $\theta_{kk'}$  の積分の形からもわかるように、モードの方を角  $\varphi$  だけ回転させるならばこれは  $\varphi = 0$  とおいたことと同等であり、しかも各  $k$  モードの角  $\varphi$  の回転は  $u_k^+$ ,  $u_k^-$  に対するユニタリ変換、したがってこれは又ベクトル  $(a_k^+, a_k^-)$ ,  $(b_k^+, b_k^-)$  に対する同時的なユニタリ変換と同等である。一般に特性行列式自身はユニタリ変換では変化しないから勿論特性根も変化しない。したがって一般に  $\varphi \neq 0$  の場合にもモードの方を  $\varphi$  だけ回転させることによつて特性行列式は常に因数分解することがわかる。これははじめから  $\varphi = 0$  とおいたことと同等であるから、常に  $\varphi = 0$  であつて  $\pm$  モードは方程式において分離していると考えることができる。これが上で  $\pm$  を固定して考えた理由である。従つて  $\pm$  モードに対する行列方程式と  $\mp$  モードに対する行列方程式とは異なることがありうる。この時には特性根が  $\pm$  モードに対して一般に異なる値をとる。これを  $\pm$  モードの縮退がとれたと呼ぶ。後に見られるように  $l=1$  モードでは傾斜変形によつてこの縮退がとれる。こゝにのべた説明は固有値問題における縮退した摂動論において、まず無摂動状態を摂動行列の対角化によつて定めることと全く対応している。

### § 3 二つの表面積分

[A] (6.12)で与えた表面積分は次の様に計算される。

(6.4)で定義した函数  $u_{nl}^{\pm}(r, \theta, z)$  は

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + \omega^2) u_{nl}^{\pm}(r, \theta, z) &= 0 \\ u_{nl}^{\pm}(\sigma_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

を満足することは容易に確かめられる。こゝでは  $n$  を固定して考えているから以下では落して書く。又  $\pm$  は一応  $k, k'$  に含めてあるものとする。第3章附録3.1と同様にして図6.2の変形によつて出来た領域  $V$  に Green の第1公式を適用すれば

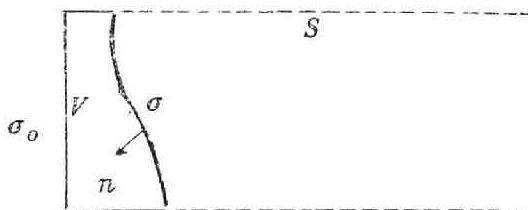


図 6.2 共振器の変形部分

$$\begin{aligned}
 -\int_{\sigma} u_k \frac{\partial u_{k'}}{\partial n} d\sigma &= \int_V (\nabla u_k \cdot \nabla u_{k'} - \omega^2 u_k u_{k'}) dV \\
 &\simeq \int_V \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{\partial u_{k'}}{\partial z} dV \\
 &= \int_{\sigma_0} \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{\partial u_{k'}}{\partial z} z(r, \theta) r dr d\theta \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

但し傾斜変形に対しては  $\sigma$  は

$$\sigma: z(r, \theta) = K \frac{\lambda}{a} r \cos(\theta - \varphi) = K \frac{2L}{n} \frac{r}{a} \cos(\theta - \varphi) \quad (6.20)$$

で与えられる。こゝに  $K$  は (3.24) と同様最大変形距離の波長に対する比である。従つて (6.19) は (6.4) を用いると

$$-\int_{\sigma} u_k \frac{\partial u_{k'}}{\partial n} d\sigma = 2K \frac{n\pi^2 a^2}{L} D_{kk'} \quad (6.21)$$

但し

$$D_{kk'} = \theta_{kk'}(\varphi) I_{kk'}(A) \quad (6.22)$$

$$\theta_{kk'}(\varphi) = \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos k'\theta \\ \sin k'\theta \end{matrix} \right\} \cos(\theta - \varphi) d\theta \quad (6.23)$$

$$I_{kk'}(A) = \int_0^1 J_k(Ax) J_{k'}(Ax) x^2 dx \quad (6.24)$$

である。 $\theta_{kk'}$  の積分は  $u_k^{\pm}, u_{k'}^{\pm}$  の組合わせによる種類があり、これは (3.22) にあ

われるものと同じ積分であつて積分値は附録 3.2 で与えられている。 $\theta_{kk'}$  の値は  $k'=k \pm 1$  でないかぎり 0 である。又  $\varphi=0$  の時には  $\pm$  間の積分、つまり  $\cos k\theta \sin k'\theta$  などの組合わせに対しても 0 になる。このことから積分  $I_{kk'}$  は  $k'=k \pm 1$  に対してのみ求めればよい。必要な積分は  $I_{lk} \quad k=l \pm 1$  であつて附録 6.1 において計算される。結果は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} I_{l, l+1}(A) &= \frac{1}{2A} \left[ l J_l^2(A) - (l+1) J_{l-1}(A) J_{l+1}(A) \right] \\ I_{l, l-1}(A) &= \frac{1}{2A} \left[ (l-1) J_{l-1}^2(A) - l J_{l-2}(A) J_l(A) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

〔B〕 (6.13) で与えた表面積分は次の様に計算される。

これも (6.19) のように議論出来るが、第 3 章 § 8 の様に被積分函数を  $\sigma_0$  の近傍で展開する方法で計算する。結果は同じである。 $z=0$  を単に 0 で示す。

$$\int_{\sigma} u_k(\sigma) \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n} \frac{\partial u_k'(\sigma')}{\partial n'} d\sigma d\sigma' \simeq \int_{\sigma} u_k(\sigma) \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial z} \frac{\partial u_k'(\sigma')}{\partial z'} d\sigma d\sigma' \quad (6.26)$$

となるが、右辺で展開する必要のあるのは

$$u_k(\sigma) \simeq \frac{\partial u_k(o)}{\partial z} z(r, \theta)$$

$$\frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial z} \simeq \frac{\partial^2 G(\sigma|o)}{\partial z \partial z'} z(r', \theta')$$

であるから、(6.26) の積分は

$$\int_{\sigma_0} \frac{\partial u_k(o)}{\partial z} z(r, \theta) \int_{\sigma_0} \frac{\partial^2 G(\sigma|o)}{\partial z \partial z'} \frac{\partial u_k'(\sigma')}{\partial z'} z(r', \theta') d\sigma_0 d\sigma'_0 \quad (6.27)$$

となる。 $G(X|X')$  に (4.11) を用い、(6.4) (6.20) を代入して積分を実行すれば結局次の形にまとめられる。



$$\int_{\sigma} u_k \int_{\sigma} \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n} \frac{\partial u_{k'}}{\partial n'} d\sigma d\sigma' \simeq i \frac{2\pi^2 K^2 a^4}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Delta_{kk'} \quad (6.28)$$

但し

$$\Delta_{kk'} \equiv \sum_{k''} \varepsilon_{k''} \theta_{kk''}(\varphi) \theta_{k''k'}(\varphi) I_{kk''k'}(A) \quad (6.29)$$

$$I_{kk''k'}(A) \equiv \int_0^1 \int_0^1 J_k(Ax) \left\{ \frac{J_{k''}(Ax) H_{k''}(Ax')}{H_{k''}(Ax) J_{k''}(Ax')} \right\}_{x' < x}^{x' > x} J_{k'}(Ax') x^2 dx x'^2 dx' \quad (6.30)$$

である。(6.30)の右辺の被積分函数において  $\left\{ \right\}$  の上側は積分領域  $x' > x$ , 下側は  $x' < x$  においてとるものとする。これは(4.11)の Green 函数の性質のためである。(6.29)の  $\theta_{kk''}(\varphi)$  は(6.23)で与えられる積分であつて  $k'' = k \pm 1$  の時以外は 0 になる。従がつて  $\Delta_{kk'}$  は  $k' = k$ ,  $k' = k \pm 2$  の時以外は 0 になる。即ち転移則  $\Delta k = 0, \pm 2$  をもっている。 $\theta_{kk''}$  は(6.23)に見られる通り  $u_{\pm k}^{\pm}, u_{\pm k}^{\pm}$  の結合わせによる種類があるから(6.29)の  $k''$  の和の中には  $\pm$  に関する和もあらわれるものとする。特に  $\varphi = 0$  の場合には前に述べたように、 $\pm$  の間の結合はなくなるから、 $\theta_{kk''}$   $\theta_{k''k'}$  を通じて  $+$  又は  $-$  は一定である。

§ 2で行つた近似では  $\Delta_{kk'}$  は(6.14)において  $\Delta_{ll}$  としてしかあらわれないから、この時の(6.29)(6.30)を(6.24)等を用いてもう少し具体的に書きあらわす。

$$\Delta_{ll} = \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k \theta_{lk}(\varphi) \theta_{kl}(\varphi) \left\{ [I_{lk}(A)]^2 + i J_{lk}(A) \right\} \quad (6.31)$$

但し

$$J_{lk}(A) \equiv 2 \int_0^1 x^2 dx J_l(Ax) N_k(Ax) \int_0^x J_k(Ax) J_l(Ax') x'^2 dx' \quad (6.32)$$

( $k = l \pm 1$ )

は(6.30)の虚部からあらわれる 2 重積分である。これは附録 6.1 の (A 5.2) を用いれば 1 重積分に直すことが出来る。

$$J_{l, l+1}(A) = \frac{l}{A} \int_0^1 J_l^3(Ax) N_{l+1}(Ax) x^4 dx$$

$$- \frac{(l+1)}{A} \int_0^1 J_{l-1}(Ax) J_l(Ax) J_{l+1}(Ax) N_{l+1}(Ax) x^4 dx$$

( 6.33 )

$$J_{l, l-1}(A) = \frac{l-1}{A} \int_0^1 J_{l-1}^2(Ax) J_l(Ax) N_{l-1}(Ax) x^4 dx$$

$$- \frac{l}{A} \int_0^1 J_{l-2}(Ax) J_l^2(Ax) N_{l-1}(Ax) x^4 dx$$

( 6.34 )

この積分をあらわに式の形に求めることは困難であるので、後に必要な  $A$  の数値に対し数値積分を行なう。

( 6.31 ) の  $k=l \pm 1$  についての和は  $\theta_{lk}$  の  $\pm$  に関する和も含んでいるが、もし  $\varphi=0$  ならば上の注意によつて  $\pm$  は一定であつて和をとる必要がないから  $\theta_{lk} \theta_{kl} = [\theta_{lk}]^2$  となり ( 6.31 ) は ( 6.22 ) を用いると

$$\Delta_{ll} = \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k D_{lk}^2 + i \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k \theta_{lk}^2 J_{lk} \quad ( 6.35 )$$

ともあらわすことが出来る。

## § 4 特性行列式と特性根

### § 4.1 特性行列式

基礎方程式 ( 6.16 ) ( 6.17 ) は当然ながら無変形  $K=0$  の時には ( 5.5 ) に帰着し、その特性行列方程式は ( 5.9 ) で与えられる。しかしながら変形のある  $K \neq 0$  の時には ( 5.9 ) の特性根は  $K$  の函数として変化をうけるであろうと考えられる。( 6.16 ) ( 6.17 ) の斉次連立方程式の特性行列式の根はそのような変化をあらわすものを含んでいるはずである。その様な根のうち  $K \rightarrow 0$  で考えている  $l$  モードの ( 5.9 ) の特性根に一致するものを求める必要がある。したがつて、直接 ( 6.16 ) ( 6.17 ) の特性行列式を作ると、不要の根があらわれるおそれがあるから、次の様に変形して求める。即ち ( 6.17 ) から  $a_k, b_k$  ( $k=l \pm 1$ ) を解いて  $a_l, b_l$  であらわし、それを ( 6.16 ) に代入して  $a_k, b_k$  ( $k=l \pm 1$ ) を消去すれば ( 6.16 ) は  $a_l, b_l$  のみの 2 階の斉次方程式となる。それ

が変形のある場合の (5.5) に対応する式であるから、その特性行列式をつくればその根が求める  $K$  の変化を含んだ根である。

この様な操作を (5.16) (5.17) のような複雑な方程式において実行することは一見困難なことの様に思われるが、次の様に行列の形に書いて行うならば容易に何の近似を行うこともなく簡単な結果に到達することが出来る。

(5.16) (5.17) をわかり易くするために次の形に書く。

$$\left. \begin{aligned} A_l a_l + B_l b_l &= \sum_{k=l, l\pm 1} E_{lk} a_k + \sum_k F_{lk} b_k \\ C_l a_l + D_l b_l &= \sum_{k=l, l\pm 1} G_{lk} a_k + \sum_k H_{lk} b_k \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k a_k + B_k b_k &= E_{kl} a_l + F_{kl} b_l \\ C_k a_k + D_k b_k &= G_{kl} a_l + H_{kl} b_l \end{aligned} \right\} \quad (k=l\pm 1) \quad (6.37)$$

あるいは行列形に書けば

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_l \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix} = \sum_{k=l, l\pm 1} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{lk} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{lk} \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix} \quad (k=l\pm 1) \quad (6.39)$$

但し、ここで ( ) の下の添字は行列要素に付くべき添字である。(6.36) (6.37) と (6.16) (6.17) とを比べれば

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} J_k H_k + a & A J_k H'_k + b \\ A J'_k H_k + c & A^2 J'_k H'_k + d \end{pmatrix}, \quad (k=l, l\pm 1) \quad (6.40)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 8N \begin{pmatrix} K_{nn} & L_{nn} \\ \bar{M}_{nn} & N_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{lk} = 4\pi^2 K^2 N^2 \varepsilon_l \Delta_{ll} \begin{pmatrix} H_l H_l & \Lambda H_l H_l' \\ \Lambda H_l H_l & \Lambda^2 H_l' H_l' \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{lk} &= i 2\pi^2 KN \varepsilon_l D_{lk} \begin{pmatrix} H_l H_k & \Lambda H_l H_k' \\ \Lambda H_l H_k & \Lambda^2 H_l' H_k' \end{pmatrix} \\ &= i 2\pi^2 KN \varepsilon_l D_{lk} \begin{pmatrix} H_l & 0 \\ 0 & \Lambda H_l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & \Lambda H_k' \end{pmatrix} \quad (6.43) \\ &\quad (k=l\pm 1) \end{aligned}$$

で与えられる。上では  $J_k(A)$  等を単に  $J_k$  とあらわした。はじめにのべた処方に従つて (6.39) を解いて (6.38) に代入して  $a_k, b_k$  を消去し、その特性行列式をつくれば

$$\Delta = \left| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_l - \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{ll} - \sum_{k=l\pm 1} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{lk} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k^{-1} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{kl} \right| \quad (6.44)$$

となる。但し (6.40) によつて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k^{-1} &= \frac{1}{\Delta_k} \begin{pmatrix} \Lambda^2 J_k' H_k' + d & -\Lambda J_k H_k' - b \\ -\Lambda J_k' H_k - c & J_k H_k + a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \left[ \begin{pmatrix} \Lambda H_k' & 0 \\ 0 & H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda J_k' & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] \quad (6.45) \end{aligned}$$

$$\Delta_k \equiv \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}_k \quad k=l, l\pm 1 \quad (6.46)$$

である。(6.43)(6.45) で行列を素因子に分解したのは、次に行なう行列の計算をわかりやすくするためである。(6.44) 中の第3項にあらわれる行列の積を (6.43)(6.45) を用いて計算する時、次の形の行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & AH'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AH_k & 0 \\ 0 & H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & AH'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & AH'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= [dH_k^2 - (b+c)AH_kH'_k + aA^2(H'_k)^2] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

があらわれることを用いるならば、(6.44)の中の第3項は第2項の行列(6.42)と同じ形の行列になることがわかるので、結局行列式(6.44)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| \begin{pmatrix} J_l H_l + a & AJ_l H'_l + b \\ AJ'_l H_l + c & A^2 J'_l H'_l + d \end{pmatrix} + (\mu - \mu') \begin{pmatrix} H_l^2 & AH_l H'_l \\ AH_l H'_l & (AH'_l)^2 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} J_l H_l + a & AJ_l H'_l + b \\ AJ'_l H_l + c & A^2 J'_l H'_l + d \end{pmatrix} \right| + (\mu - \mu')^2 \left| \begin{pmatrix} H_l^2 & AH_l H'_l \\ AH_l H'_l & (AH'_l)^2 \end{pmatrix} \right| \\
&\quad + (\mu - \mu') \left| \begin{pmatrix} J_l H_l & AH_l H'_l \\ AJ'_l H_l & (AH'_l)^2 \end{pmatrix} \right| + (\mu - \mu') \left| \begin{pmatrix} H_l^2 & AJ_l H'_l \\ AH_l H'_l & A^2 J'_l H'_l \end{pmatrix} \right| \\
&\quad + (\mu - \mu') \left| \begin{pmatrix} a & AH_l H'_l \\ c & (AH'_l)^2 \end{pmatrix} \right| + (\mu - \mu') \left| \begin{pmatrix} H_l^2 & b \\ AH_l H'_l & d \end{pmatrix} \right| \quad (6.47)
\end{aligned}$$

第1項は(6.46)による  $\Delta_l$  であり、第2項は 0，第3項と第4項は打消しあうので結局特性行列方程式は次の様に簡単化される。

$$\Delta = \Delta_l + (\mu - \mu') [dH_l^2 - (b+c)AH_l H'_l + aA^2(H'_l)^2] = 0 \quad (6.48)$$

但し

$$\mu \equiv 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_{k=l \pm 1} \frac{\varepsilon_k D_{lk}^2}{\Delta_k} [dH_k^2 - (b+c)AH_k H'_k + aA^2(H'_k)^2]$$

$$\mu' \equiv 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \Delta_{ll} \quad (6.49)$$

$$= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \left[ \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k D_{lk}^2 + i \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k \theta_{lk}^2 J_{lk} \right]$$

である。(6.50)では(6.35)を用いている。

いうまでもなく(6.48)は  $K=0$  の時は  $\Delta_l=0$ ，即ち(5.9)に帰着する。

## § 4.2 特性行列方程式の根

上に導びいた(6.48)の根を求めれば変形のある場合の損失が求められる。基礎方程式(6.16)(6.17)では  $K^2$  の項までとり入れる近似であつたから，(6.48)の根も  $K^4$  以上の高次の項による効果は無視して求める。

まず必要な近似を行なう。(6.41)で定義した  $a, b, c, d$  に対し(4.62)(4.65)(4.68)で与えられる  $\alpha$  についての巾展開を用い，(4.38)を考慮して必要な最初の項のみを書けば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \simeq \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \frac{2}{3} (1-i) & -i \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{3} (1-i) \\ i \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{3} (1-i) & \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1} (1+i) \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

とあらわされる。(6.46)で定義される  $\Delta_k$  は(5.9)又は(5.12)の左辺に対応する式であつて

$$\frac{\Delta_k}{d} = J_k(A) H_k(A) + (1-i) \varepsilon \alpha + O(\alpha^2), \quad k=l, l \pm 1 \quad (6.52)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{\pi}{2} \left( \frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) = 0.36878 \dots \quad (6.53)$$

とあらわされるから，(6.49)は(6.52)を用いると  $\alpha$  の巾展開の形で

$$\begin{aligned} \mu &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \frac{d}{\Delta_k} [H_k^2(A) + O(\alpha^2)] \\ &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \left[ \frac{H_k(A)}{J_k(A)} - \frac{\varepsilon (1-i) \alpha}{J_k^2(A)} \right] \end{aligned}$$

$$= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \left[ 1 - \frac{\varepsilon \alpha}{J_k^2(A)} + i \left( \frac{N_k(A)}{J_k(A)} + \frac{\varepsilon \alpha}{J_k^2(A)} \right) + O(\alpha^2) \right] \quad (6.54)$$

と書ける。故に(6.50)を用いれば

$$\begin{aligned} \mu - \mu' &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \left[ -\sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \frac{\varepsilon \alpha}{J_k^2(A)} + i \left\{ \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \frac{N_k(A)}{J_k(A)} + \frac{\varepsilon \alpha}{J_k^2(A)} - \sum_k \varepsilon_k \theta_{lk} J_{lk} \right\} \right] \\ &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k \theta_{lk} \left[ -I_{lk}^2 \frac{\varepsilon \alpha}{J_k^2(A)} + i \left\{ I_{lk}^2 \frac{N_k(A)}{J_k(A)} + \frac{\varepsilon \alpha}{J_k^2(A)} - J_{lk} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.55)$$

となる。ここで  $O(\alpha^2)$  を無視し(6.22)を用いた。

(6.52)(6.55)の近似を用いるならば、特性行列方程式(6.48)は

$$J_l(A)H_l(A) + (1-i)\varepsilon\alpha + (\mu - \mu')H_l^2(A) = 0 \quad (6.56)$$

となる。この方程式の根を(5.14)のように  $A = A_{lm}(1 + \delta)$  とおいて求める。ここでは簡単のために根は  $O(\alpha^2)$  を無視するが、変形に関しては  $K^2 N^2 \alpha$  の次数までとし、 $K^2 N^2 \alpha^2$  は無視する近似をとる。このためにはやはり Bessel 函数は  $A = A_{lm}$  の近傍で2次までの展開が必要である。計算の詳細は附録6.2に示す。この様にして(6.56)の特性行列方程式の根として上の近似の範囲内で

$$\begin{aligned} \delta \simeq & -\frac{\pi}{2} \left\{ (1+i)\varepsilon\alpha - i(\mu - \mu')N_l^2(A_{lm}) \right. \\ & \left. - 2(\mu - \mu')(1-i)\varepsilon\alpha \frac{\pi}{4} N_l^2(A_{lm}) \left[ (1-2l) + \pi A_{lm}^2 (J_{l+1}(A_{lm})N_{l+1}(A_{lm})) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.57)$$

がえられる。ここで  $(\mu - \mu')$  の実部は(6.55)によつて  $K^2 N^2 \alpha$  の大きさ、又虚部は  $K^2 N^2$  の大きさであることを考慮している。(6.57)の第1項は云うまでもなく(5.15)の第1項に等しい。第2項以下は変形による効果である。

(6.57)は(6.48)の根の近似式として求められたが、これは  $K^2$  までを考慮した基礎方程式(6.16)(6.17)に対する特性根である。しかしながら(6.16)(6.17)では

$K^4$  の効果が無視出来る場合に成立するのであつて、この条件は、(6.6)又は(6.16) (6.17)の励振項からもわかるように  $(KN)^4 \ll (KN)^2$  とあらわすことができる。すなわち基礎方程式(6.6)(6.7)に対する特性根としての(6.57)の適用限界は多くとも  $KN < 1$  の範囲内である。これは第3章§7の空洞理論の場合の適用限界と符合している。

## § 5 回折損失

回折損失は(5.18)によつて上の近似においては(6.57)の虚部で与えられる。(6.57)に(6.55)を代入してその虚部をとればこの近似の範囲において

$$\begin{aligned}
 -I_m(\delta) &= \frac{\pi}{2} \left\{ \varepsilon \alpha - R_e(\mu - \mu') N_l^2(A_{lm}) \right. \\
 &\quad \left. - 2 I_m(\mu - \mu') \varepsilon \alpha \frac{\pi}{4} N_l^2(A_{lm}) \left[ (1-2l) + \pi A_{lm}^2 J_{l+1}(A_{lm}) N_{l+1}(A_{lm}) \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi}{2} \varepsilon \alpha \left\{ 1 + 4 \pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_{k=l \pm 1} \varepsilon_k \theta_{lk}^2 \left[ I_{lk}^2 \frac{N_l^2(A_{lm})}{J_k^2(A_{lm})} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \left[ J_{lk} - I_{lk}^2 \frac{N_k(A_{lm})}{J_k(A_{lm})} \right] \left[ (1-2l) + \pi A_{lm}^2 J_{l+1}(A_{lm}) N_{l+1}(A_{lm}) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\pi}{4} N_l^2(A_{lm}) \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{6.58}$$

となる。ここで  $I_{lk}$  は(6.25)で与えられる積分であるが今の場合  $A = A_{lm}$  における値であるから

$$\begin{aligned}
 I_{l, l+1}(A_{lm}) &= -\frac{(l+1)}{2A_{lm}} J_{l+1}(A_{lm}) J_{l-1}(A_{lm}) = \frac{(l+1)}{2A_{lm}} J_{l+1}^2(A_{lm}) \\
 I_{l, l-1}(A_{lm}) &= \frac{(l-1)}{2A_{lm}} J_{l-1}^2(A_{lm})
 \end{aligned}
 \tag{6.59}$$

で与えられる。但し上で Bessel 函数の漸化式を利用した。(6.59)を(6.58)に代



入して、Lommel の公式<sup>83)</sup> からえられる関係

$$J_{l\pm 1}^2(A_{lm})N_l^2(A_{lm}) = \left( \frac{2}{\pi A_{lm}} \right)^2 \quad (6.60)$$

などを用いると (6.58) はいくらか簡単に書かれる。

回折損失  $\delta_d$  は (5.18) に (6.58) を代入し、(6.53) および (4.38) を用いて結果を Fresnel 数  $N$  によつてあらわせば次の様にあらわされる。

$$\begin{aligned} \delta_d = & 5.20 \times 10^{-2} A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \times \\ & \times \left\{ 1 + 4\pi^4 K^2 N^2 \frac{1}{A_{lm}^2} \varepsilon_l \sum_{k=l\pm 1} \varepsilon_k \theta_{lk}^2 \left[ \frac{k^2}{(\pi A_{lm})^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[ 2A_{lm}^2 J_{lk} - \frac{k^2}{2} J_k^3(A_{lm}) N_k(A_{lm}) \right] \left[ (1-2l) + \pi A_{lm}^2 J_{l+1}(A_{lm}) N_{l+1}(A_{lm}) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\pi}{4} N_l^2(A_{lm}) \right] \right\} \quad (6.61) \end{aligned}$$

こゝで  $\theta_{lk}$  は附録 3.2 において  $\varphi=0$  として与えられる値であり、 $J_{lk}$  は (6.33)(6.34) で与えられる積分であつて  $A=A_{lm}$  の場合の積分値は附録 6.3 に示されている。

結局傾斜変形のある場合の共振器の 1 伝播当りの回折損失は次の形にまとめられる。

$$\delta_d = A_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} + B_{lm} K^2 N^{\frac{1}{2}} \quad (6.62)$$

$$N \equiv \frac{a^2}{\lambda L} \quad (\text{Fresnel 数})$$

$$K \equiv \frac{Da}{\lambda} \quad (\text{変形パラメタ})$$

( $a$  : 半径,  $L$  : 軸長,  $\lambda$  : 波長,  $D$  : 傾斜勾配)

$A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  はモード ( $l$ ,  $m$ ) に依存する数であつて (6.61) から計算したものを表 6.1 に示す。(6.62) の第 1 項は変形のない場合の損失を与えており、これは (5.19) の第 1 項である。(6.62) の第 2 項は変形のある場合の損失の増大の様子を与えている。この

$m \backslash l$	0	1	2	3
0	0.301 4.16	0.764 3.17 5.99	1.37 7.39	2.12 9.88
1	1.59 0.830	2.56 0.956 1.79	3.69 2.70	4.96 4.15
2	3.90 0.351	5.29 0.478 0.861	7.02 1.41	8.86 2.31
3	7.23 0.192	9.23 0.266 0.494	11.4 0.867	13.7 1.49

表 6.1  $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  の数値

(上段  $A$ , 下段  $B$ , 又  $l=1$  では縮退がとれて  $B$  が分裂する。左下  $\sin$  モード, 右下  $\cos$  モード)

項の適用範囲は上に述べた如く  $KN < 1$  である。(6.62)の  $\delta_d$  の表式は, 第3章において簡単な空洞理論によつて求めた表式(3.40)と定性的には全く同じ形である。 $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  の数値に差があるだけであるが表3.1と表6.1と比較すれば変形による項の係数  $B_{lm}$  の大きさ, およびモードに対する大きさの変化はほぼ一致していることがわかる。この結果によつて空洞像による変形の取扱いも誤つた結果には導びかないことが確認され, 結果が正しい理論によつて修正されたわけである。図6.3.1~4は各  $l$  モードについて一定の  $K$  に対して(6.62)を描いたものである。簡単のために  $m=0, 1$  のみに限っている。 $l=1$  の場合には変形によつて縮退がとれるために  $\delta_d$  は分裂する。図6.4.1~4は一定の  $N$  に対し, 変形による回折損失の増加の様子を示している。こゝでは第3章図3.5の場合とは異なり, 図の  $K$  の領域を  $N$  に応じて移動して図示し, 変形の効果が  $\delta_d$  に対して顕著である部分を撰んでいる。

又以上の図6.3, 図6.4では, (6.62)式の適用範囲は多くとも  $KN < 1$  であることから  $KN=1$  までを図示しているが,  $KN=1$  の近傍では精度は落ちるものと見なければならぬ。

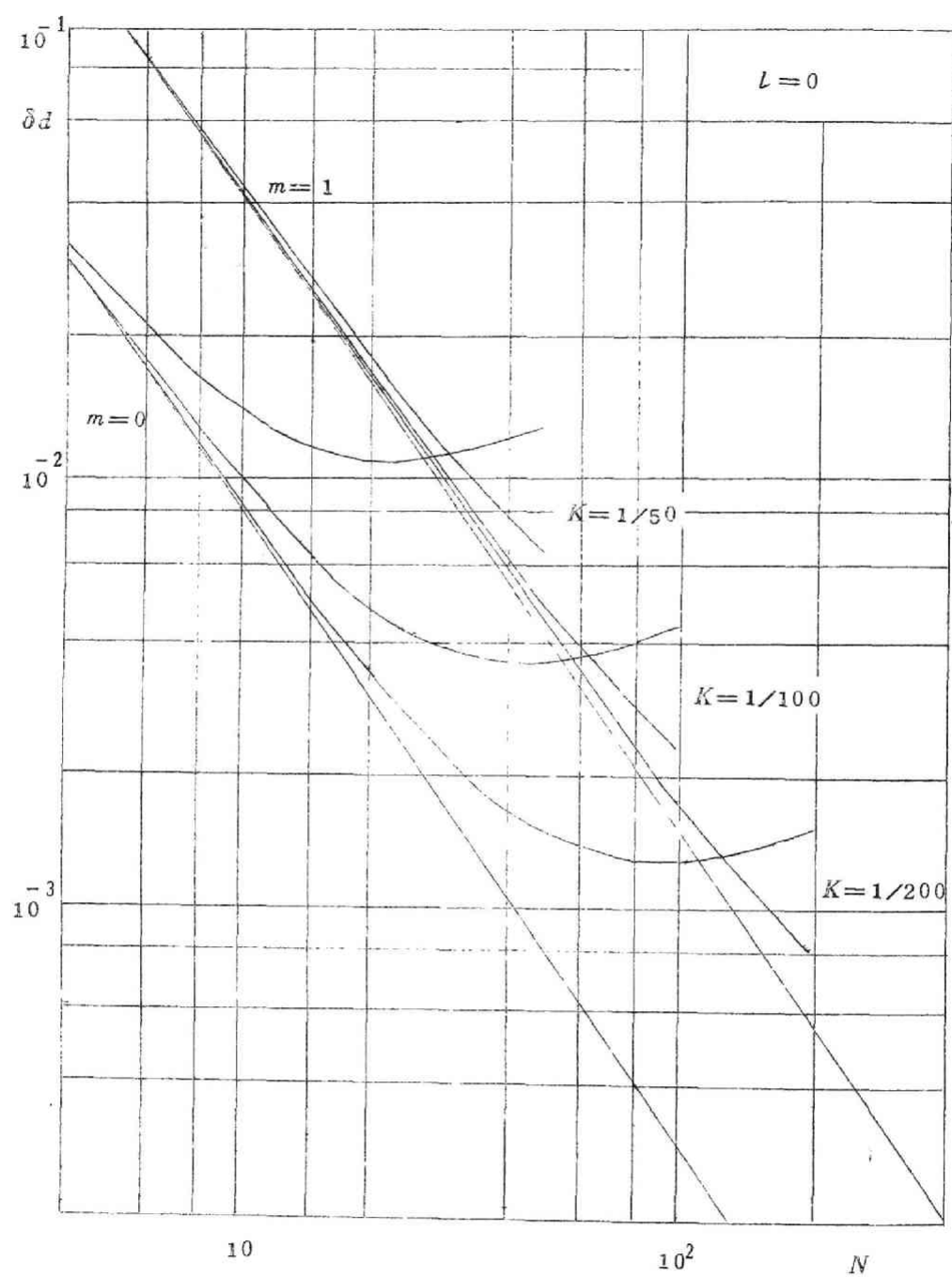


図 6.3.1 傾斜変形の場合の回折損失

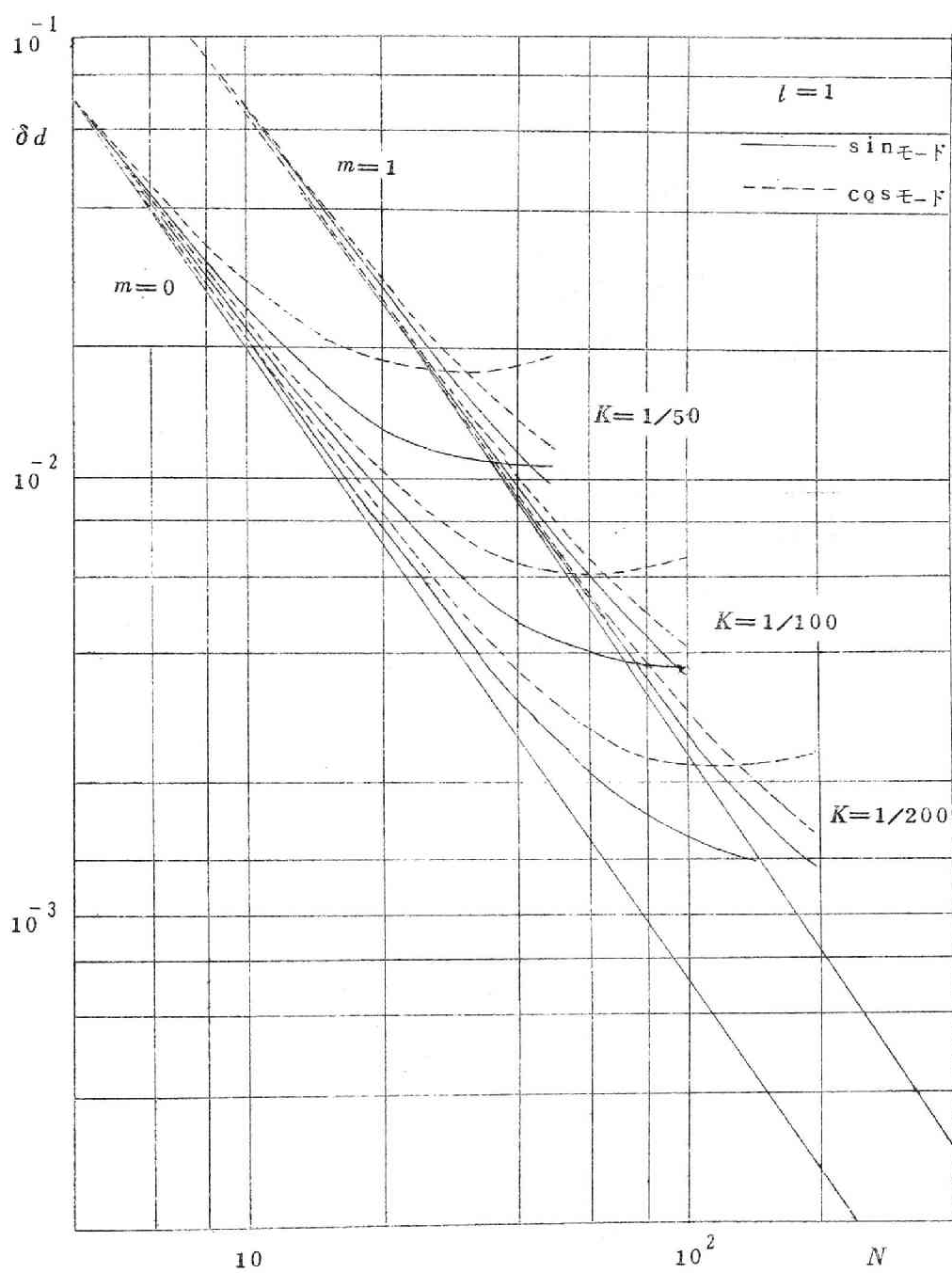


図 6.3.2 傾斜変形の場合の回折損失

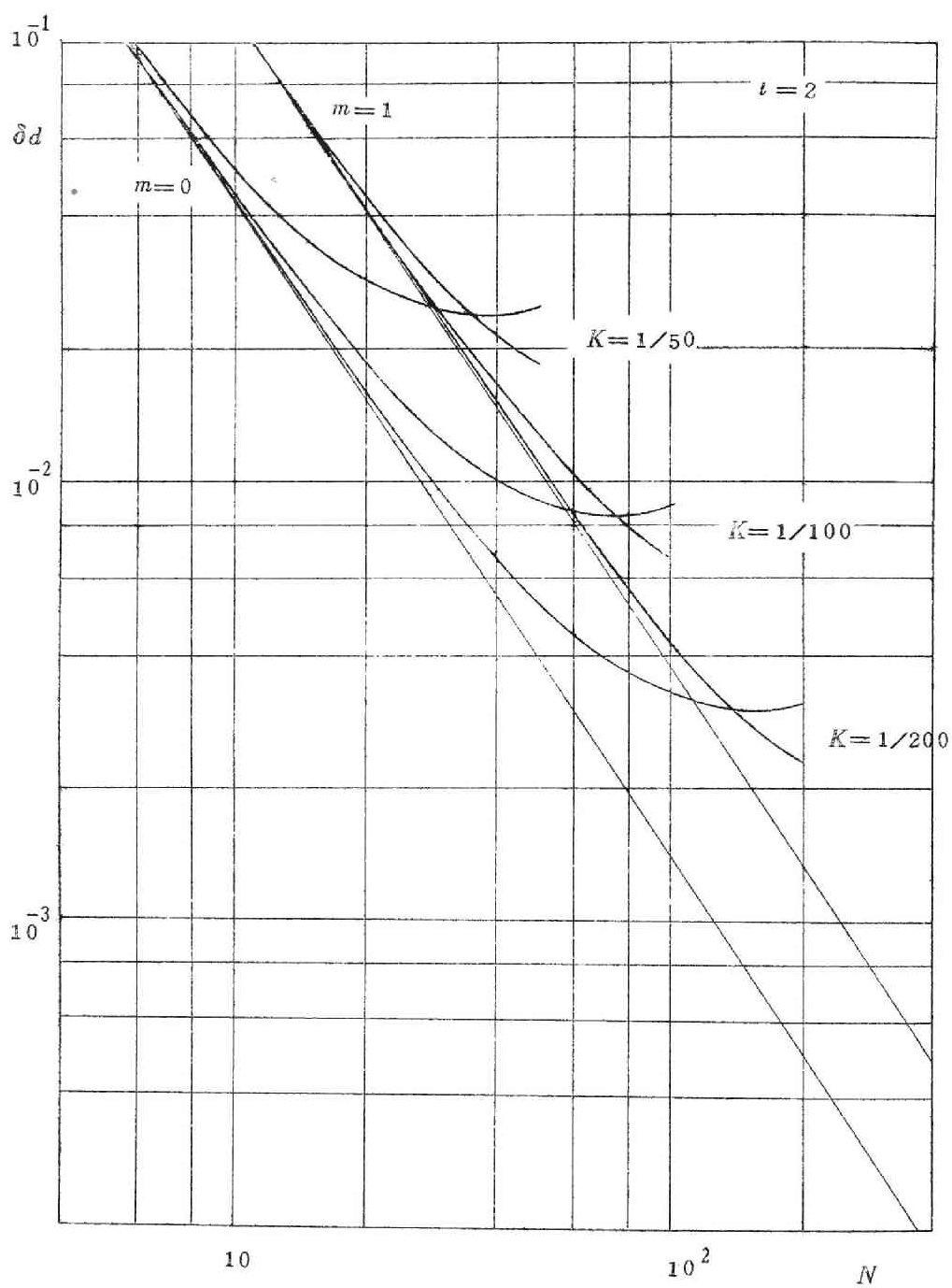


図 6.3.3 傾斜変形の場合の回折損失

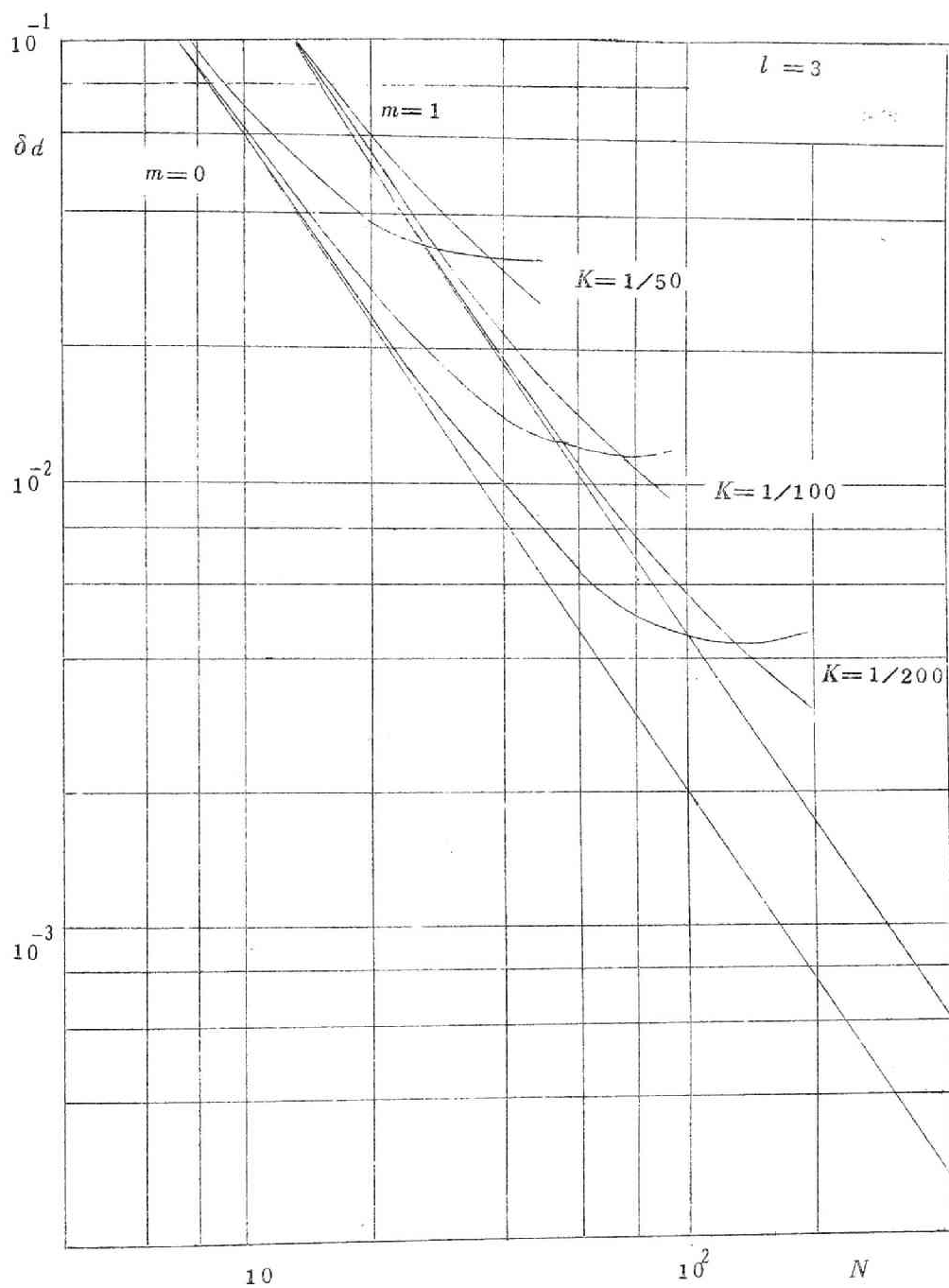


図 6.3.4 傾斜変形の場合の回折損失

## § 6 考 察

空洞理論との  
比較

傾斜変形のある  
場合の回折損  
失の表式として  
上に求めた(6.  
6 2)は、第3  
章において空洞  
理論の適用によ  
つて求めた。

(3.4 0)と全  
く同じ形であり、  
表式の導出には  
いずれの場合に  
も Fresnel  
数  $N$  が大きく  
かつ  $KN < 1$   
であることを仮  
定している。こ  
れらの表式の第  
1項すなわち無  
変形の場合の損  
失には明らかな  
差があるが、第  
5章 § 5で論じ  
たように空洞理  
論の方の近似が  
悪いためである。

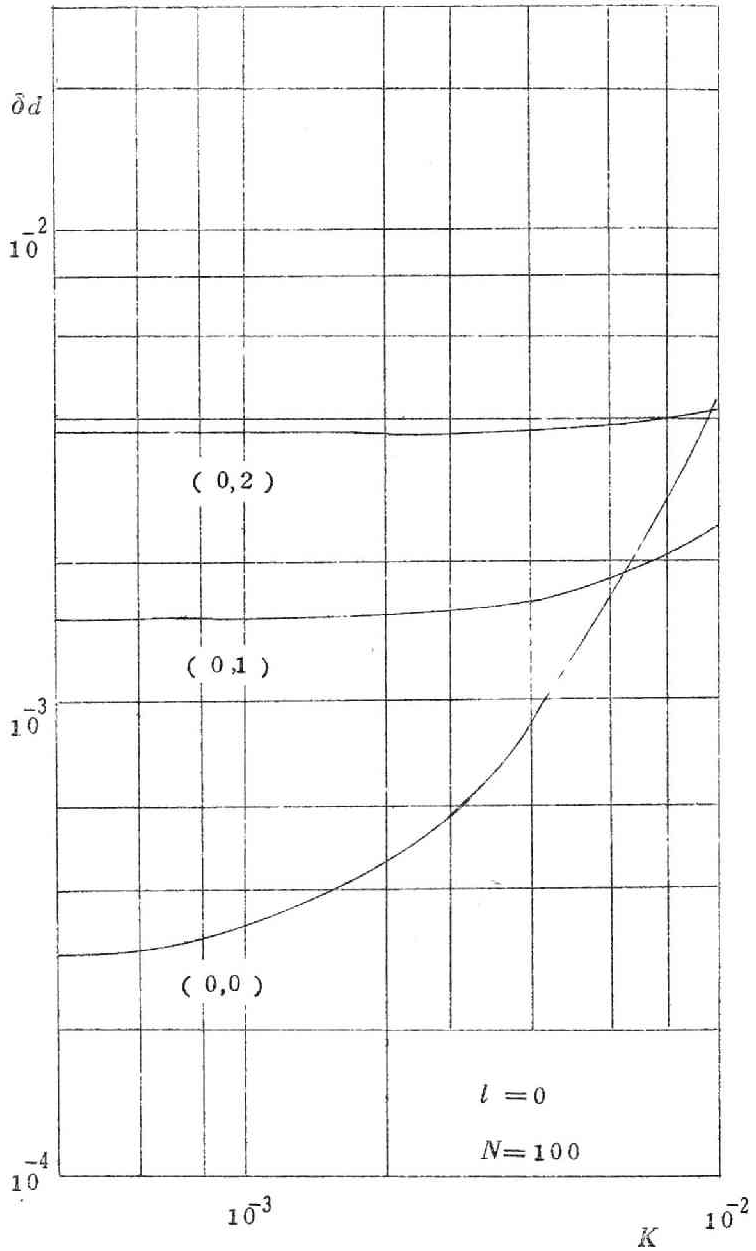


図 6.4.1 傾斜変形に対する回折損失の変化

こゝでは第2項の変形による損失の増加分のみを比較することにする。表3.1と表6.1の $B_{lm}$ の数値のみを比較すれば次のことが云える。数値の大きさ、ならびにモードに対する傾向は共に大体一致するが、表6.1の方が表3.1に比べて量子数 $m$ が大きくなると急に $B_{lm}$ が小さい値となつている。すなわち新しい結果では $m=0$ のモードは変形の影響をよくうけるが $m$ が1以上は変形の影響の受け方が急に少なくなつている。これは図6.4、図6.5を図3.4、図3.5と比較して

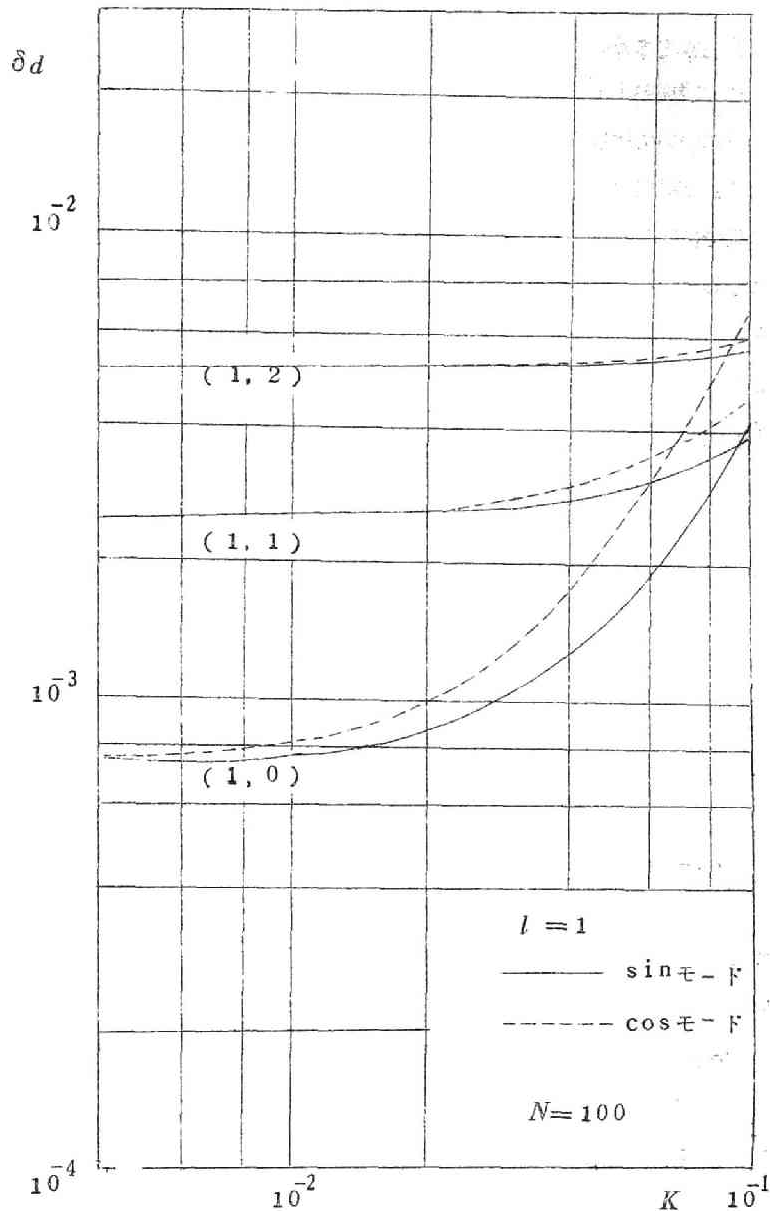


図6.4.2 傾斜変形に対する回折損失の変化



も明らかである。

次に損失最小モードについて比較する。空洞理論の結果では図3.4.2に示した様に変形が増大してゆくと損失最小モードは  $(0,0) \rightarrow (1,0)$  と変化した。が、本章の結果では図6.3.1と図6.3.2を比較するか、あるいは図6.4.3からわかる様に変形が増大につれて損失最小モードは  $(0,0) \rightarrow (0,1)$  の様になることがわかる。しかしながら、この転移点はいずれの場合も  $KN=1$  の点にかなり近いので定量的に正しく論ずることは上の近似では無理である。

いずれにしても空洞理論は簡単な取扱いはあるが、

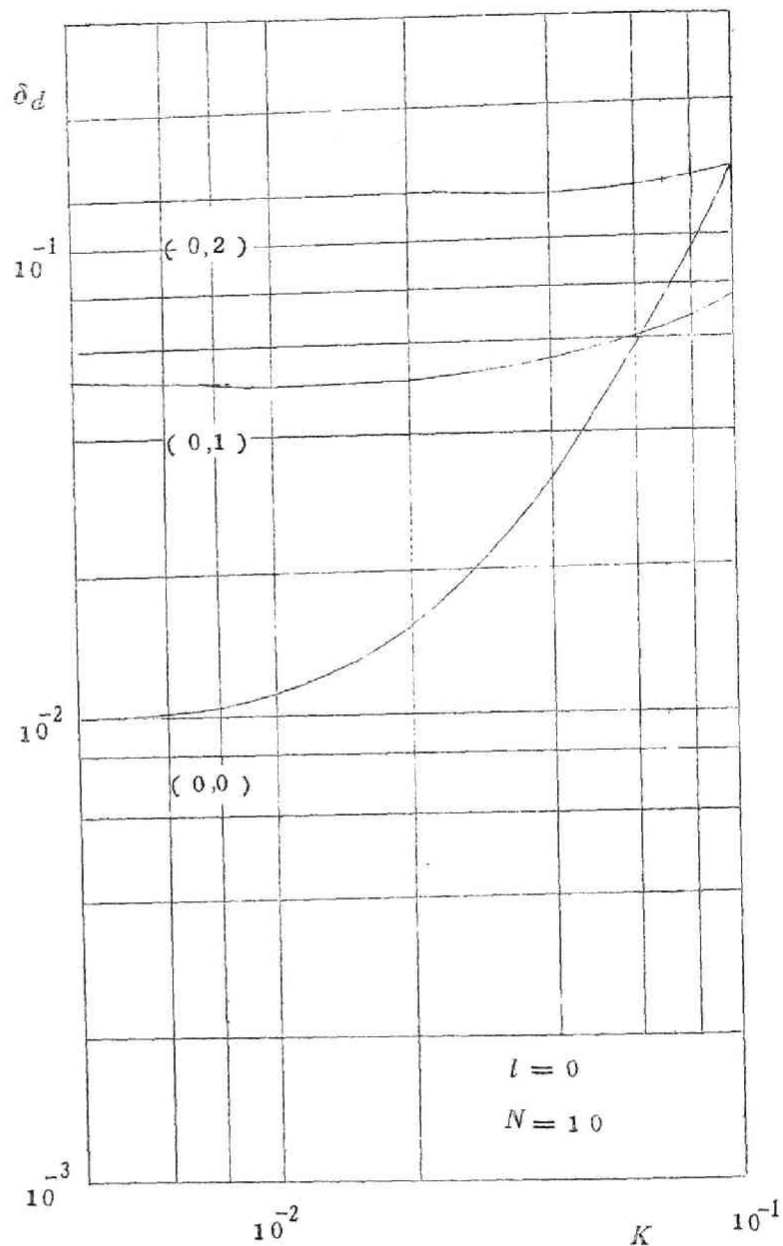


図 6.4.3 傾斜変形に対する回折損失の変化

それほど誤まつた結果を導びかないことが本章の結果によって確認、修正されたということが出来る。

Fox, Liとの比較  
第3章 §7では空洞理論による傾斜変形の結果と, Fox, Liの無限長平面ストリップの傾斜変形に対するシミュレーションの結果との比較を行い, 図3.8に図示した。こゝでも同様のことを本章の結果に対し行う。比較は図6.5に示される。比較に際しては第3章と同様の注意が必要である。この図から明らかなことは, 鏡面の形状の差異はあつても  $\delta d$  は双方かなりよく一致しており, 特に変形の小さいところでの一致は非常によいようである。図は

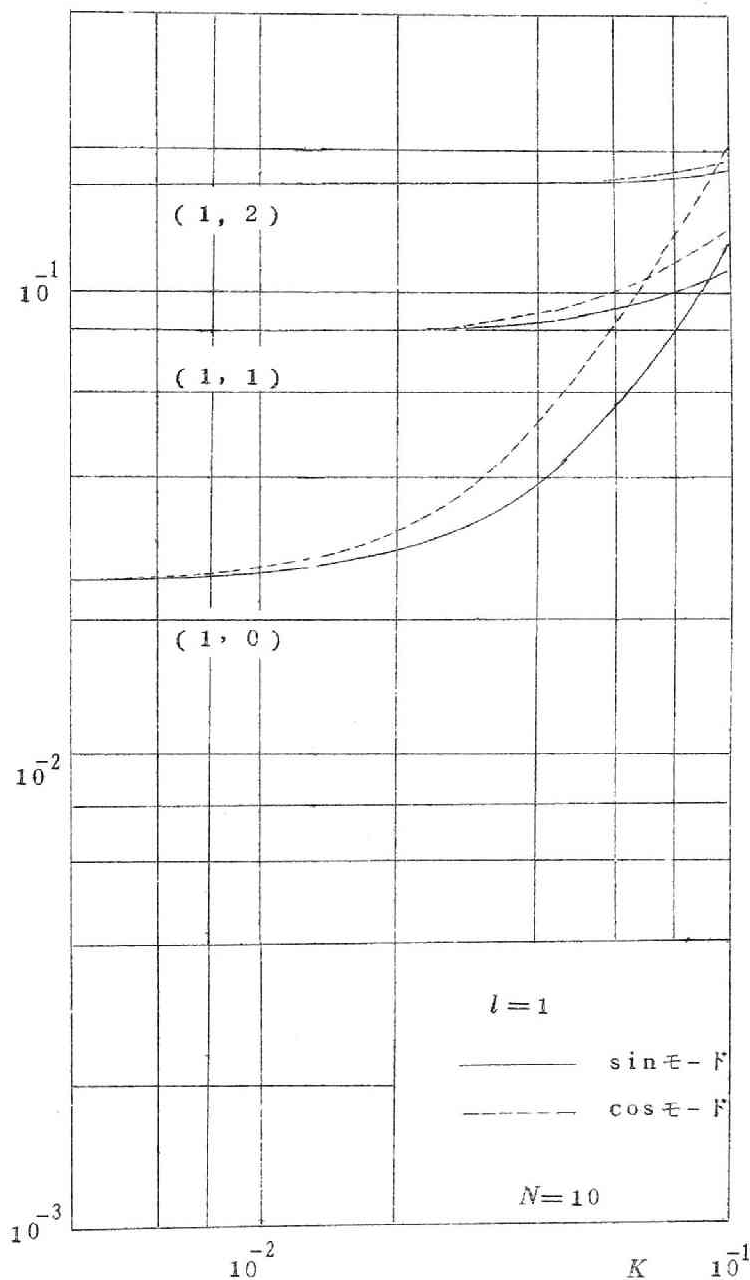


図6.4.4 傾斜変形に対する回折損失の変化

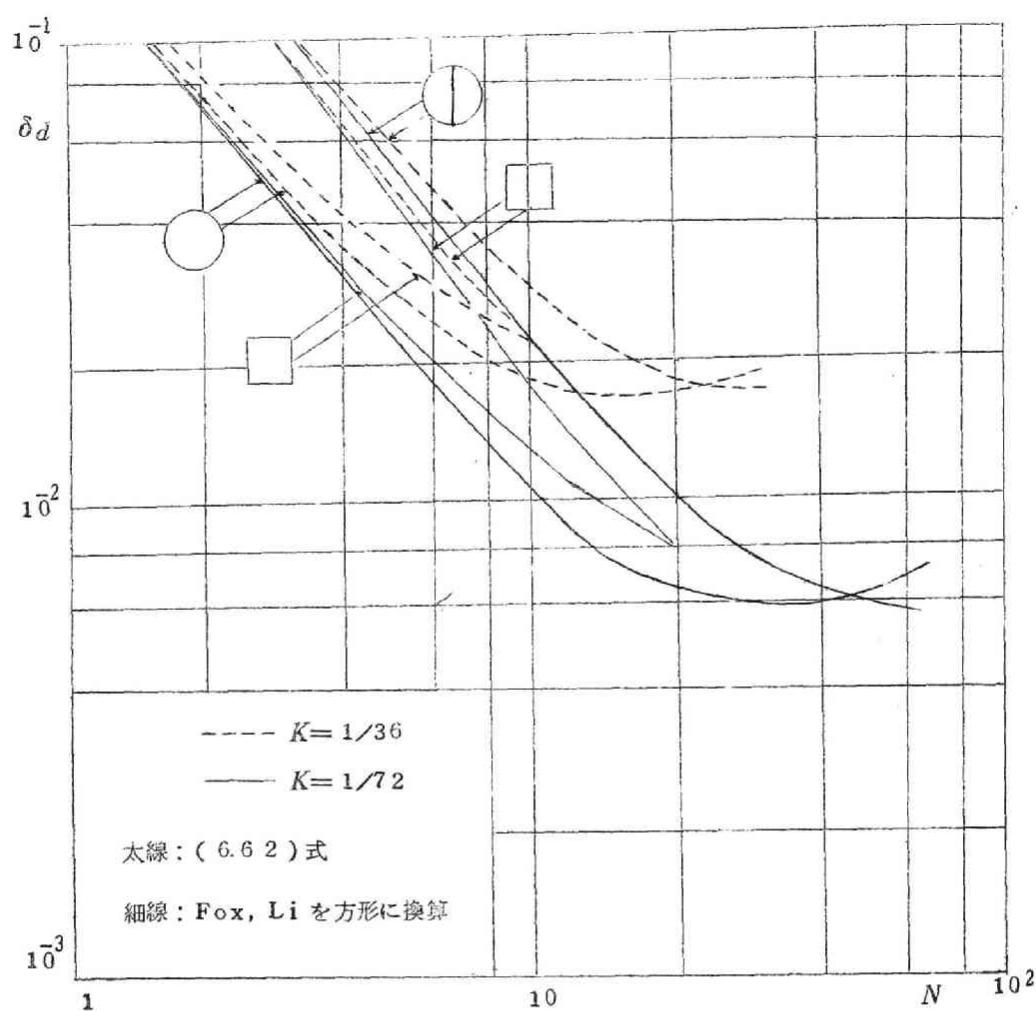


図 6.5 Fox, Li の無限長ストリップに対する傾斜変形のシミュレーションの結果との比較

$KN=1$  のところまで描いているが,  $KN=1$  近傍での不一致は更に  $K^4$  に比例する高次の補正を行えば改善されるものと思われる。

#### 球 面 変 形

第 3 章で取扱った球面変形の問題も本章における励振理論の応用と同一の方法で扱うことが

可能である。球面変形の場合は異なる  $l$  モード間の結合がないために傾斜変形よりも取扱いは簡単であつて、( 6.16 ) ( 6.17 ) のように異なる  $l$  モードに対する方程式を連立して解く必要がない。しかしながらこの変形は傾斜変形ほど重要ではないことが既に空洞理論の結果によつてはっきり明らかにされたので本章では取扱わなかつた。

## 第 7 章 結 論

本論文ではレーザー共振器としての Fabry Perot 共振器の一つの型である円型平行平面鏡共振器の諸問題を波動方程式の境界値問題として取扱い、特にその自由減衰振動モードについて理論的解析を行なった。それらの研究方法ならびに成果は次の様に要約される。

研究の初期の段階では空洞共振像に基づいて Fabry Perot 共振器の自由振動ならびに鏡面変形の問題を取扱った。最初に第 2 章においては Fabry Perot 共振器の自由減衰振動モードの理論を空洞理論とアンテナ理論との結合として定式化した。すなわち開口面よりの輻射を Green 函数で記述し、振動の減衰効果を閉空洞の適当な固有振動モードに対する輻射の振動効果として取扱い、回折損失等を固有値の変化によつて求めた。その結果、共振器の  $Q$ 、回折損失、周波数変化が Fresnel 数ならびに Bessel 函数の根の簡単な代数式として導びかれ、異なつた立場に基づく干渉計理論におけるシミュレーションの数値解に対応するものが、数式によつて統一的にあらわされた。又空洞理論によつて種々の問題たとえば異なる屈折率の媒質でみたされた場合、鏡面変形、変調などの問題の取扱いが可能になり、更にこの理論は後に第 4 章で行なう平行平面鏡共振器の理論の完全な定式化のための足がかりを与えた。

次に第 3 章においては空洞理論を用いて Fabry Perot 共振器について重要である鏡面変形の問題を解析した。レーザーでは波長が非常に短かいために製作、調整などから生ずる鏡面変形の効果が無視出来ず、その理論的解析が要望されていたが、従来の他の定式化ではこの取扱いは困難であつて簡単な場合に対する計算機によるシミュレーションの結果が知られているにすぎなかつた。空洞理論ではこの変形の問題は振動法を用いて容易に解析することが可能であつた。その結果、変形のある場合の自由振動モードの回折損失は Fresnel 数、変形パラメタの簡単な代数式として定量的に与えられ、種々の重要な結果が導びかれた。平行平面鏡共振器にあつては、傾斜変形による回折損失の変化は変形の 2 乗に比例して増大すること、傾斜変形に対しては非常に敏感であつて非常にわずかの、たとえば  $1/100$  波長程度の変形でも損失は急増すること、更に角量子数  $l=1$  のモードは傾斜変形によつて回折縮退がとれることなどが示された。これらのことから平行平面 Fabry Perot 共振器がレーザー共振器に使用された場合の鏡の調整が困難であることが示され、又逆に誤調整の許容度を見積もることが可能である。球面変形の場合には損失の変化は変形の 1 乗に比例し、したがつて曲率の正負

に応じて損失が減少又は増大すること、球面変形は傾斜変形の様には敏感には損失に効かないこと、ならびにモード依存性は殆んどあらわれないことなどが明らかにされた。

第4章では平行平面 Fabry Perot 共振器の励振問題の完全な定式化を行つた。これは導波管共振像を基礎として Green 函数法を利用して開口面における連続条件を記述し励振問題を一組の連立積分方程式の形とするものである。更にこれらを平行平面導波管モードの境界値に対応する無限次元のベクトル方程式に帰着させ、必要な行列要素の計算公式ならびに方程式の解法を与えて問題を解析可能な形とした。Fabry Perot 共振器の理論的解析は現在に至るまで開口共振器としての自由減衰振動モードの研究のみが行われてきたのであつて励振問題のようなより一般的な問題は困難なために殆んど着手されていなかった。しかしながら実際の立場からもさらに現在マイクロ波模型で行われている実験的な研究の立場からも励振問題の定式化ならびに解析を行う必要があつた。第4章の励振理論はこの要請に答えるものであり、これによつて種々の励振方式に対する問題の解析を行ない、共振曲線、場の分布、自由振動モードとの関係等を求めることが可能になつた。又この理論の特徴的な点は解析に際し自由振動モードの知識を必要としないことであつて、通常のマイクロ波空洞の励振理論の様に自由振動つまり固有振動モードの知識をすべて必要とする取扱いと非常に異なっている。本論文においては自由振動モードを主題としているので励振問題の解析の具体的な結果には立入らない。

上に与えた平行平面鏡共振器の完全な定式化を利用してその特別の場合として無励振の場合を解き、自由振動モードに対する結果を導びいた。これによつてシミュレーションならびに種々の解析法による従来の結果を一般的に再現することが出来、更に場の振巾ならびに位相分布を種々の Fresnel 数とモードに対して詳しく与えることが出来た。この様な詳細な結果は従来の解析方法では得られなかつたものである。そのうち特別な場合は従来の干渉計理論のシミュレーションによる結果をよく再現していることが示された。又この解析方法にもとづいて空洞理論の方法、結果を批判しその近似の良くない理由を指摘した。

第6章では励振理論の一つの応用として変形した Fabry Perot 共振器の自由振動を再び取扱つた。これは空洞理論が一種の仮定を含んでいるために、その理論にもとづく変形の取扱ひの結果を正しい理論によつて確認することを目的とした。鏡面変形の効果を等価励振源に置きかえることにより、重要な場合として傾斜変形を取扱つた。その結果空洞理論の結果を若干修正したが、全体としてはほぼ正しい結果であることを確認することが出来た。

以上の内容はすべて Fabry Perot 共振器の自由振動モードのみを論じて必要な種々の

結果を導びいたが、励振理論が具体的に定式化されたので、一般に平行平面型 Fabry Perot 共振器に関する理論上の諸問題はこれによつてほぼ解決されたものと思われる。

## 謝 辞

本論文の研究ならびに作成に際し懇切な御指導御鞭撻を賜つた池上淳一教授に深甚の謝意を表する。又終始研究に協力して頂いた大学院博士課程吉田靖夫氏に厚くお礼申し上げます。修士特別研究として研究に協力された現電波研究所の殿本殿氏、其他種々御討論下さつた池上研究室の方々にもあわせてお礼申し上げます。

附録 2.1 二, 三 の 公 式

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (\text{A 2.1})$$

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} dk \quad (-\infty < z < \infty) \quad (\text{A 2.2})$$

$$\delta(r) = r \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (0 \leq r < \infty) \quad (\text{A 2.3})$$

$$(\nabla^2 + \omega^2) J_0(\lambda r) e^{ikz} = [\omega^2 - k^2 - \lambda^2] J_0(\lambda r) e^{ikz} \quad (\text{A 2.4})$$

Bessel 函数の加法定理

$$J_0(\lambda|r-r'|) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l J_l(\lambda r) J_l(\lambda r') \cos l(\theta - \theta') \quad (\text{A 2.5})$$

$$H_0(\lambda|r-r'|) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l H_l(\lambda r) J_l(\lambda r') \cos l(\theta - \theta') \quad (r > r') \quad (\text{A 2.6})$$

但し

$$|r-r'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')} \quad (\text{A 2.7})$$

$$\varepsilon_l \equiv \begin{cases} 1 & , \quad l=0 \\ 2 & , \quad l \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A 2.8})$$

附録 2.2 積分公式 (2.34) の証明

直接の証明は  $H_0^{(1)}$  と  $S(k)$  の多価性のために困難であるのでこれを避けるために積分路を変形して (2.29) の右辺に帰着させる。図 2.10 の第 1 図の積分路は  $z$  の正負に無関係であるが、それを第 2 図、第 3 図の様に  $z$  の正負に応じて積分路を変更する。太線はカットである。第 1 図では  $S(k)$  の偏角は  $k=0$  で 0 になるように定義している。その時



$$\int_{-\infty}^{\infty} dk H_0(S(k)r) e^{ikz}$$

の被積分函数は  $z < 0$  の場合上半面で解析的であり、しかも半径無限大の半円上の積分は寄与しないことが示される。従がつて第1図

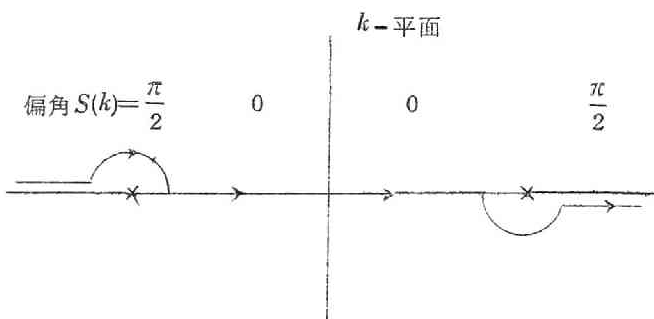


図 2.1 0.1

の積分路を第2図の様に變更出来る。分岐点  $k = \omega$  ( $S(k) = 0$ ) は又  $H_0^{(1)}$  の特異点でもある。  $+\omega$  のまわりの小円に沿う積分の寄与は無視出来ることが示される。第2図の積分路上の  $S(k)$  の偏角は図中に示されている。  $k$  (偏角  $\theta$  :  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) に対する2価函数  $S(k)$  の対応がこれで定まつたから変数変換

$$\sqrt{\omega^2 - k^2} = S \quad (\text{偏角 } 0)$$

を行うと

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} =$$

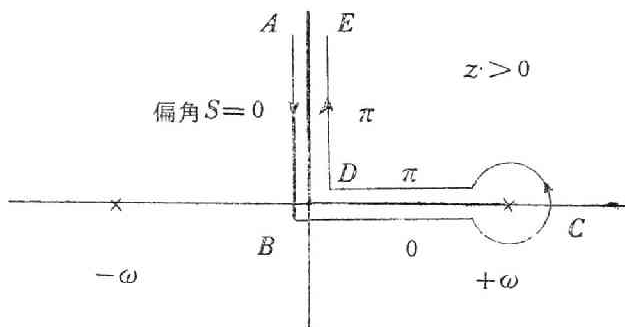


図 2.1 0.2

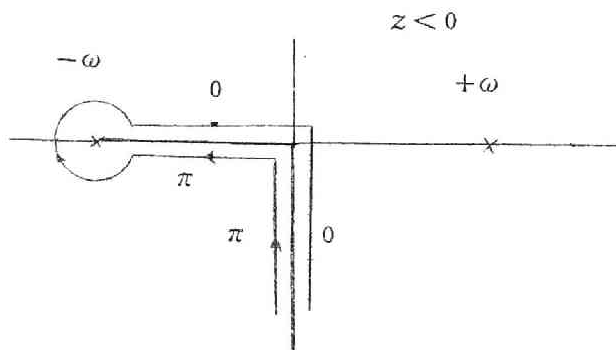


図 2.1 0.3

$$-\int_{-\infty}^{\omega} H_0(Sr) e^{ikz} \frac{SdS}{k} - \int_{\omega}^0 H_0^{(1)}(Sr) e^{ikz} \frac{SdS}{k}$$

$$-\int_0^\omega H_0(e^{i\pi S r}) e^{ikz} \frac{S dS}{k} - \int_\omega^\infty H_0^{(1)}(e^{i\pi S r}) e^{ikz} \frac{S dS}{k}$$

$$= 2 \int_0^\infty J_0(S r) e^{ikz} \frac{S dS}{k} \quad (z > 0)$$

となる。但し、 $H_0^{(1)}$   
 $(e^{i\pi} Z) = H_0^{(1)}(Z) -$   
 $2J_0(Z)$  の関係<sup>83)</sup> を  
 用いた。第3図の場合  
 $(z < 0)$  も全く同様に  
 行われる。注意すべきこ

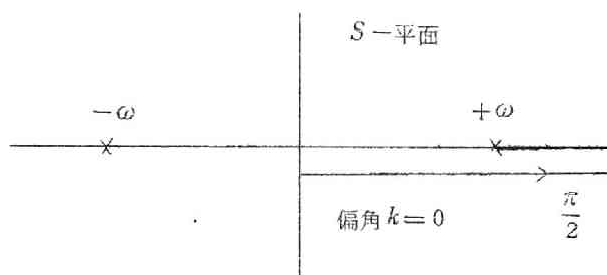


図 2.10.4

とは、上の積分の置換え  
 において  $k$  の偏角が上の

式にあらわれる  $k$  よりも偏角が  $\pi$  だけ進んでいるから、上と同じ  $k$  を用いる時には、 $k \rightarrow -k$   
 と書くことが必要である。この様にして

$$2 \int_0^\infty J_0(S r) e^{-ikz} \frac{S dS}{k} \quad (z < 0)$$

が得られる。したがって  $S \rightarrow \lambda$  と書けば (2.34) は (2.29) に帰着された。これで証明  
 は終つたが積分路について調べる。たとえば  $z > 0$  の場合、第2図において積分が  $S$  に関し  
 $0 \rightarrow \infty$  と動くとき  $k$  の偏角は  $C \xrightarrow{0} B \xrightarrow{\frac{\pi}{2}} A$  と変化する。これは丁度  $S$  平面 (第4図) におい  
 て  $S$  の積分路が分岐点  $+\omega$  の下を通つたことに相当している。従がつて (2.29) より (2.30)  
 を導びくための積分路の定義<sup>78)</sup> と一致している。

### 附 録 3.1 鏡面変形摂動行列

Green の第1公式を右図の  
 領域に適用すると

$$-\int_\sigma u_a \frac{\partial u_b}{\partial n} d\sigma + \int_{S+\sigma_0} u_a \frac{\partial u_b}{\partial n} dS$$

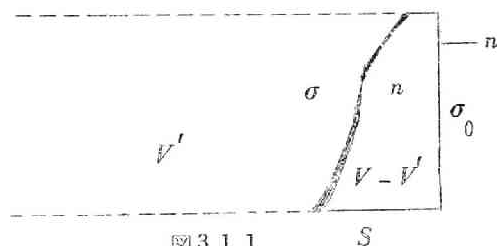


図 3.1.1

$$= \int_{V-V'} u_a \nabla^2 u_b dV + \int_{V-V'} \nabla u_a \cdot \nabla u_b dV \quad (\text{A 3.1})$$

左辺は  $\sigma_0$  上  $\{u_\nu\}$  が  $S$  型,  $S'$  型を問わず第 2 項は 0 になるので,  $\sigma$  上  $S$  型境界に対しては

$$H_{ab} = - \int_{\sigma} u_a \frac{\partial u_b}{\partial n} d\sigma = \int_{V-V'} (\nabla u_a \cdot \nabla u_b - \omega_b^2 u_a u_b) dV$$

特に  $\sigma$  が波長に比して小さい微小変形であると次の様に近似ができる。

$$\simeq \int_{V-V'} \nabla u_a \cdot \nabla u_b dV \quad (\sigma \text{ 上 } S \text{ 型}) \quad (\text{A 3.2})$$

又  $\sigma$  上  $S'$  型境界の場合も同様にして

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \int \frac{\partial u_a}{\partial n} u_b d\sigma = - \int_{V-V'} (\nabla u_a \cdot \nabla u_b - \omega_a^2 u_a u_b) dV \\ &\simeq \omega_a^2 \int_{V-V'} u_a u_b dV \quad (\sigma \text{ 上 } S' \text{ 型}) \quad (\text{A 3.3}) \end{aligned}$$

と書かれる。上の行列要素はレーザー用の共振器のモードに対しては近似的に等しくなる。

### 附録 3・2 傾斜変形摂動行列の角部分の積分

$$\int_0^{2\pi} \cos l\theta \cdot \cos l'\theta \cdot \cos(\theta - \varphi) d\theta = \pi \cos \varphi \begin{cases} 1 & (l, l') \\ 1 & (0, 1) \\ 1 & (1, 0) \\ \frac{1}{2} & (l, l+1) \quad l \geq 1 \\ \frac{1}{2} & (l, l-1) \quad l \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A 3.4})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin l\theta \cdot \sin l'\theta \cdot \cos(\theta - \varphi) d\theta = \pi \cos \varphi \begin{cases} 0 & (0, 1) \\ 0 & (1, 0) \\ \frac{1}{2} & (l, l+1) \quad l \geq 1 \\ \frac{1}{2} & (l, l-1) \quad l \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A 3.5})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin l\vartheta \cdot \cos l'\vartheta \cdot \cos(\vartheta - \varphi) d\vartheta = \pi \sin \varphi \begin{cases} 0 & (0, 1) \\ 1 & (1, 0) \\ -\frac{1}{2} & (l, l+1) \quad l \geq 1 \\ \frac{1}{2} & (l, l-1) \quad l \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A 3.6})$$

### 附録 3.3 積 分 公 式

$$(a) \quad \int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) x^2 dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) \quad (\text{A 3.7})$$

但し

$$J_\nu(\alpha) = 0, \quad J_{\nu-1}(\beta) = 0 \quad (\text{A 3.8})$$

証明: Bessel 函数の次数に対する降次演算子<sup>83)</sup>

$$\frac{d}{dZ} [Z^\nu J_\nu(Z)] = Z^\nu J_{\nu-1}(Z) \quad (\text{A 3.9})$$

を利用する。これは又書直すと

$$\frac{1}{\beta^\nu} \frac{d}{d\beta} [\beta^\nu J_\nu(\beta x)] = x J_{\nu-1}(\beta x) \quad (\text{A 3.10})$$

微分方程式から容易に導びかれる次の公式<sup>83)</sup>

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) x dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} \quad (\text{A 3.11})$$

を使用する。まず (A 3.10) に  $x J_\nu(\alpha x)$  を乗じて  $x=0$  から 1 まで積分すると,

(A 3.11) を利用して

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) x^2 dx &= \frac{1}{\beta^\nu} \frac{d}{d\beta} \left[ \beta^\nu \int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) x dx \right] \\ &= \left\{ \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right\} \{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \frac{1}{\beta^\nu} \frac{d}{d\beta} [\beta^\nu \{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} ]$$

これに ( A 3.10 ) を反復使用して

$$\begin{aligned} &= \frac{2\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^2} \{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} \\ &+ \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \{ \alpha J_{\nu-1}(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu(\beta) \} \quad (A 3.12) \end{aligned}$$

これが ( A 3.7 ) の左辺の積分に対する一般的な等式であるが，特に ( A 3.8 ) の条件があるときには証明すべき等式 ( A 3.7 ) に帰着する。

$$(b) \quad \int_0^1 J_{\nu-1}(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) x^3 dx = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^2} J_\nu(\alpha) J_\nu(\beta) \quad (A 3.13)$$

但し

$$J_{\nu-1}(\alpha)=0 \quad , \quad J_{\nu-1}(\beta)=0 \quad , \quad (\alpha \neq \beta) \quad (A 3.14)$$

証明： まず ( A 3.14 ) が成立するとき，次の関係が成立つことを示す。

$$\alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) = 0 \quad (A 3.15)$$

これは公式<sup>83)</sup>  $2\nu J_\nu(Z) = Z [J_{\nu-1}(Z) + J_{\nu+1}(Z)]$  において  $Z=\alpha, \beta$  とおいたものをつくり，はじめのものに  $J_\nu(\beta)$ ，あとのものに  $J_\nu(\alpha)$  を乗じて辺を引算すればえられる。

( A 3.10 ) 式と ( A 3.10 ) で  $\beta$  の代りに  $\alpha$  とおいたものを辺々相乗してから  $x$  を乗じ， $x=0$  から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned} &\int_0^1 J_{\nu-1}(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) x^3 dx \\ &= \left( \frac{1}{\beta^\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^\nu \right) \left( \frac{1}{\alpha^\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^\nu \right) \left[ \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} \right] \end{aligned}$$

こゝで上小節 (a) のやり方と同様にして微分演算を実行し、(A 3.10) を反復使用すれば

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha J_{\nu-1}(\beta) J_{\nu}(\alpha) - \beta J_{\nu-1}(\alpha) J_{\nu}(\beta) \} \\
 &+ \frac{2\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \{ \alpha J_{\nu}(\beta) J_{\nu}(\alpha) - \beta J_{\nu-1}(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} \\
 &- \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \{ \alpha J_{\nu-1}(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_{\nu}(\alpha) J_{\nu}(\beta) \} \\
 &- \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^3} \{ \alpha J_{\nu}(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_{\nu}(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \} \quad (\text{A 3.16})
 \end{aligned}$$

これが (A 3.13) の左辺の積分に対する一般的な等式であるが、特に (A 3.14) の条件がある時には (A 3.15) を考慮すれば証明すべき等式 (A 3.14) に帰着する。

#### 附録 3.4 $\delta_d$ の $\varphi$ -依存性

$\delta_d$  の  $\varphi$ -依存性は、無擾動状態が  $l=1$  の場合以外はすべてなくなることを示す。附録 3.2 からわかるように、 $H$  は (+, -) については対角ではないから一般に  $\delta_d$  の中には無擾動状態が + であつても、中間状態の和には +, - の両方があらわれる。 $\delta_d''$  の代表的な項について書下す。 $I$  が  $l$  と +, - に関して対角であることから  $l \geq 2$  に対しては次の様になる。こゝで無擾動状態を  $0 \equiv (l, M, +)$  で指定し、行列要素には +, - の添字も付けることにする。(3.30) に (A 3.4) ~ (A 3.6) を用いれば

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mu, \nu \neq 0} \frac{H_{\mu 0} H_{\nu 0} I_{\mu \nu}}{(\omega_0^2 - \omega_{\mu}^2)(\omega_0^2 - \omega_{\nu}^2)} \\
 &= \sum_{l'=l+1} \sum_{m, m'} \frac{\begin{pmatrix} H_{l' m'}^+ \\ H_{l' m'}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{l' m'}^+ \\ H_{l' m'}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{l' m' m'}^+ \\ I_{l' m' m'}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{l' m'}^- \\ H_{l' m'}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{l' m'}^- \\ H_{l' m'}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{l' m' m'}^- \\ I_{l' m' m'}^+ \end{pmatrix}}{(\omega_{l' M}^2 - \omega_{l' m'}^2)(\omega_{l' M}^2 - \omega_{l' m'}^2)}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{l', m, m'} \frac{(H)(H)(I) \cos^2 \varphi + (H)(H)(I) \sin^2 \varphi}{(\omega_{l'm}^2 - \omega_{l'm'}^2)(\omega_{l'M}^2 - \omega_{l'm'}^2)}$$

$$= \sum_{l' m m'} \frac{(H)(H)(I)}{(\omega_{l'M}^2 - \omega_{l'm}^2)(\omega_{l'M}^2 - \omega_{l'm'}^2)}$$

となり  $\varphi$  に無関係である。こゝで  $(H)$  等は  $\varphi=0$  の場合の行列要素をあらわす。  $e=0$  の時は上で  $l'=1$  のみであつてやはり  $\varphi$  に依存しない。  $l=1$  の時は  $l'=2$  の項は上と同じく  $\varphi$  に依存しないが  $l=0$  の項は (A3.4) ~ (A3.6) によつて

$$\sum \frac{(H^{01})(H^{01})(I^{00}) \cos^2 \varphi}{(\omega_{1M}^2 - \omega_{0m}^2)(\omega_{1M}^2 - \omega_{0m'}^2)} + \sum \frac{(H^{21})(H^{21})(I^{22})}{(\omega_{1M}^2 - \omega_{2m}^2)(\omega_{1M}^2 - \omega_{2m'}^2)}$$

となり  $\varphi$ -依存性があらわれる。数値計算によれば  $\delta_d''$  の  $\varphi$  依存性は殆んど 0 か又は 0 になる。

$\delta_d'''$  の場合も同様に計算をすることが出来る。(3.31) に (A3.4) ~ (A3.6) を用いれば

$$\sum_{\mu, \nu} \frac{H_{\nu\mu} H_{\mu 0} H_{\nu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)}$$

$$= \sum_{l'=l+1} \sum_{m, m'} \frac{\begin{pmatrix} H_{m m'}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{m' M}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m M}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{m m'}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{m' M}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m M}^+ \end{pmatrix}}{(\omega_{l'M}^2 - \omega_{l'm'}^2)(\omega_{l'M}^2 - \omega_{l'm}^2)}$$

となるがこれも上と同じ様に  $\varphi$  に無関係となる。  $l=0$  の場合は  $l'=1$  の項のみであつて同様に  $\varphi$  に無関係である。  $l=1$  の場合には  $\cos^2 \varphi$  があらわれ  $\delta_d'''$  は  $l=1$  の場合には  $\varphi$  に依存することがわかる。数値計算によればこの  $\varphi$  依存の項は  $\delta_d''$  の場合と異なり無視することは出来ない大きさである。

附録 3.5 級数和の数値表

傾斜変形

$$\delta_d: \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{Lm}^2}{(A_{LM}^2 - A_{Lm}^2)^3} \right]^2 \text{ の値, } \begin{array}{l} \text{上段 } L=l-1 \\ \text{下段 } L=l+1 \end{array}$$

$l \backslash M$	0	1	2	3
0	$4.67 \times 10^{-4}$	$2.50 \times 10^{-16} >$ $2.88 \times 10^{-5}$	$2.25 \times 10^{-5}$ $2.02 \times 10^{-4}$	$3.77 \times 10^{-5}$ $1.51 \times 10^{-4}$
1	$1.68 \times 10^{-5}$	$5.60 \times 10^{-16} >$ $2.58 \times 10^{-5}$	$3.12 \times 10^{-6}$ $2.80 \times 10^{-5}$	$6.89 \times 10^{-6}$ $2.75 \times 10^{-5}$
2	$2.78 \times 10^{-6}$	$1.08 \times 10^{-15} >$ $5.83 \times 10^{-6}$	$8.58 \times 10^{-7}$ $7.71 \times 10^{-6}$	$2.18 \times 10^{-6}$ $8.71 \times 10^{-6}$
3	$8.04 \times 10^{-7}$	$4.84 \times 10^{-17} >$ $1.98 \times 10^{-6}$	$3.26 \times 10^{-7}$ $2.93 \times 10^{-6}$	$9.03 \times 10^{-7}$ $3.61 \times 10^{-6}$

$$\delta_d'' : \left[ \sum_{m'}^{\infty} \frac{A_{Lm'}^2}{(A_{LM}^2 - A_{Lm'}^2)^3} \sum_{m \neq M}^{\infty} \frac{A_{lm}^2}{(A_{Lm'}^2 - A_{lm}^2)(A_{LM}^2 - A_{lm}^2)} \right] \text{ の値}$$

$l \backslash M$	0	1	2	3
0	$1.15 \times 10^{-4}$	$2.75 \times 10^{-5}$ $5.16 \times 10^{-5}$	$9.88 \times 10^{-6}$ $2.73 \times 10^{-5}$	$4.26 \times 10^{-6}$ $1.74 \times 10^{-5}$
1	$2.97 \times 10^{-5}$	$1.73 \times 10^{-5}$ $1.94 \times 10^{-5}$	$1.09 \times 10^{-5}$ $1.31 \times 10^{-5}$	$7.30 \times 10^{-6}$ $9.31 \times 10^{-5}$
2	$1.31 \times 10^{-5}$	$9.19 \times 10^{-6}$ $9.67 \times 10^{-6}$	$6.69 \times 10^{-6}$ $7.29 \times 10^{-6}$	$5.03 \times 10^{-6}$ $5.62 \times 10^{-6}$
3	$7.25 \times 10^{-6}$	$5.57 \times 10^{-6}$ $5.74 \times 10^{-6}$	$4.37 \times 10^{-6}$ $4.59 \times 10^{-6}$	$3.50 \times 10^{-6}$ $3.74 \times 10^{-6}$



球面変形： $\sum_{m \neq M} \frac{A_{lm}^2}{[A_{lm}^2 - A_{lM}^2]^3}$  の値

$l \backslash M$	0	1	2	3	4
0	$2.35 \times 10^{-3}$	$1.41 \times 10^{-3}$	$9.69 \times 10^{-4}$	$7.12 \times 10^{-4}$	$5.50 \times 10^{-4}$
1	$6.38 \times 10^{-4}$	$4.23 \times 10^{-4}$	$3.18 \times 10^{-4}$	$2.55 \times 10^{-4}$	$2.11 \times 10^{-4}$
2	$2.70 \times 10^{-4}$	$2.01 \times 10^{-4}$	$1.61 \times 10^{-4}$	$1.37 \times 10^{-4}$	$1.15 \times 10^{-4}$
3	$1.47 \times 10^{-4}$	$1.17 \times 10^{-4}$	$9.76 \times 10^{-5}$	$8.38 \times 10^{-5}$	$7.35 \times 10^{-5}$

#### 附録 4.1 Fresnel 積分の漸近形

不定積分

$$I^S(P) \equiv \int x^P \sin x dx, \quad I^C(P) \equiv \int x^P \cos x dx$$

とおくとき次の漸化公式が成立つ。<sup>86)</sup>

$$I^S(P) = -x^P \cos x + P I^C(P-1)$$

$$I^C(P) = x^P \sin x - P I^S(P-1)$$

これを用いると漸近展開

$$I^S(P) = -x^P \cos x + P x^{P-1} \sin x + P(P-1) x^{P-2} \cos x - P(P-1)(P-2) x^{P-3} \sin x - \dots$$

$$I^C(P) = x^P \sin x + P x^{P-1} \cos x - P(P-1) x^{P-2} \sin x - P(P-1)(P-2) x^{P-3} \cos x + \dots$$

が成立する。特に

$$I^S\left(\frac{1}{2}\right) = \int y^{\frac{1}{2}} \sin y dy = 2 \int x^2 \sin x^2 dx = -y^{\frac{1}{2}} \cos y + \frac{1}{2} I^C\left(-\frac{1}{2}\right)$$

(A 4.1)

$$I^c\left(\frac{1}{2}\right) = \int y^{\frac{1}{2}} \cos y dy = 2 \int x^2 \cos x^2 dx = y^{\frac{1}{2}} \sin y - \frac{1}{2} I^s\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{A 4.2})$$

又

$$I^s\left(-\frac{1}{2}\right) = \int y^{-\frac{1}{2}} \sin y dy = 2 \int \sin x^2 dx \quad (y=x^2)$$

$$= -\frac{\cos y}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2^2} \frac{\cos y}{y^{\frac{5}{2}}} + \frac{3 \cdot 5}{2^3} \frac{\sin y}{y^{\frac{7}{2}}} - \dots \quad (\text{A 4.3})$$

$$I^c\left(-\frac{1}{2}\right) = \int y^{-\frac{1}{2}} \cos y dy = 2 \int \cos x^2 dx \quad (y=x^2)$$

$$= \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\cos y}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2^2} \frac{\sin y}{y^{\frac{5}{2}}} + \frac{3 \cdot 5}{2^3} \frac{\cos y}{y^{\frac{7}{2}}} + \dots \quad (\text{A 4.4})$$

Fresnel 積分の漸近形

(A 4.3) (A 4.4) の定積分として次の Fresnel 積分の漸近形がえられる。

$$2 \int_0^{x^2} \sin x^2 dx = 2 \int_0^\infty + 2 \int_\infty^{x^2} \sin x^2 dx$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos x^2}{|x|} - \frac{1}{2} \frac{\sin x^2}{|x|^3} + \frac{3}{2^2} \frac{\cos x^2}{|x|^5} + \dots \quad (\text{A 4.5})$$

$$2 \int_0^{x^2} \cos x^2 dx = 2 \int_0^\infty + 2 \int_\infty^{x^2} \cos x^2 dx$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin x^2}{|x|} - \frac{1}{2} \frac{\cos x^2}{|x|^3} - \frac{3}{2^2} \frac{\sin x^2}{|x|^5} + \dots \quad (\text{A 4.6})$$

又 (A 4.1) (A 4.2) の定積分は

$$2 \int_0^{x^2} x^2 \sin x^2 dx = -|x| \cos x^2 + \int_0^{x^2} \cos x^2 dx \quad (\text{A 4.7})$$

$$2 \int_0^{x^2} x^2 \cos x^2 dx = |x| \sin x^2 - \int_0^{x^2} \sin x^2 dx \quad (\text{A 4.8})$$

であつて、(A 4.5) (A 4.6) を用いれば漸近形が求められる。

#### 附録 5.1 特性行列式 (5.9) の根の近似値

方程式 (5.12) の根を  $\alpha^2$  の次数まで求める。そのためには  $J_l(A)H_l(A)$  は  $(A - A_{lm})$  の 2 次までの展開が必要であり、又 (5.12) の  $\alpha^2$  の係数では  $A = A_{lm}$  における値で十分である。

$$J_l(A)H_l(A) = (JH)'_{A=A_{lm}} x + \frac{(JH)''_{A=A_{lm}}}{2} x^2 \equiv bx + ax^2$$

但し

$$x = A - A_{lm}$$

$$a = \frac{1}{2} (JH)''_{A=A_{lm}} = \frac{i}{\pi A_{lm}} + (J'H')_{A=A_{lm}}$$

$$b = (JH)'_{A=A_{lm}} = \frac{2i}{\pi A_{lm}}$$

の様に展開し、又 (5.12) において

$$P = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) (1-i) \quad (\text{A 5.2})$$

$$Q = -i \frac{1}{3} [AJ'H' + 2A^2 J'H']_{A=A_{lm}} = i \frac{2}{3} \left( \frac{i}{\pi} - A_{lm}^2 J'H' \right)$$

とおけば解くべき方程式 (5.12) は

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad c \equiv P\alpha + Q\alpha^2 \quad (\text{A 5.3})$$

の形に書ける。この解のうち  $c \rightarrow 0$  の時  $x \rightarrow 0$  になるものを  $\alpha^2$  の項まで求めることが必要である。それは容易に求められて

$$x \simeq -\frac{P}{b} \alpha - \left( \frac{Q}{b} + \frac{a^2}{b^3} \right) \alpha^2 \quad (\text{A 5.4})$$

となる。(A 5.1)を用いてこの第2項の $\alpha^2$ の係数を計算すると

$$\begin{aligned} Q + a \frac{P^2}{b^2} &= i \frac{2}{3} \left( \frac{i}{\pi} - A^2 J' H' \right) + i \left( \frac{i}{\pi} + A^2 J' H' \right) \frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} - i \left\{ \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} A_{lm}^2 (J' H')_{A=A_{lm}} \\ &= -\frac{1}{\pi} [1.33780] + i [0.00446] A_{lm}^2 (J' H')_{A=A_{lm}} \quad (\text{A 5.5}) \end{aligned}$$

となる。従がつて

$$A_{lm}^2 (J' H')_{A=A_{lm}} = -i \frac{2l}{\pi} + A_{lm}^2 J_{l+1} (A_{lm}) \bar{H}_{l+1} (A_{lm}) \quad (\text{A 5.6})$$

となることを用いて(A 5.1)(A 5.2)(A 5.5)を(A 5.4)に代入すれば

$$\begin{aligned} x = A - A_{lm} &= -0.5793(1+i) \alpha A_{lm} \\ &+ \left\{ i 0.6689 + 0.00223 \left[ -2li + \pi A_{lm}^2 J_{l+1} (A_{lm}) \bar{H}_{l+1} (A_{lm}) \right] \right\} \alpha^2 A_{lm} \end{aligned} \quad (\text{A 5.7})$$

となる。 $\alpha^2$ の係数{ }の中の第2項はモード( $l, m$ )に依存するが、第1項に比してわずかであるから無視することが出来る。数値的には  $l=0$  では第1項の1%以下、 $l=1$  では1.0%程度である。

## 附録 6.1 積 分 公 式

次の積分公式が成立する。

$$\int_0^1 J_l(Ax) J_{l+1}(Ax) x^2 dx = \frac{1}{2A} \left\{ l J_l(A) - (l+1) J_{l-1}(A) J_{l+1}(A) \right\} \quad (\text{A 6.1})$$

特に不定上限に対し

$$\int_0^x J_l(Ax) J_{l+1}(Ax) x^2 dx = \frac{x^2}{2A} \{ l J_l^2(Ax) - (l+1) J_{l-1}(Ax) J_{l+1}(Ax) \} \quad (\text{A 6.2})$$

但し次数が負の時は  $J_{-l}(A) = (-1)^l J_l(A)$  の意味である。

証明： 公式<sup>83)</sup>

$$I(A) \equiv \int_0^1 J_l^2(Ax) x dx = \frac{1}{2} [J_l^2(A) - J_{l-1}(A) J_{l+1}(A)] \quad (\text{A 6.3})$$

を利用する。まず (A 6.3) の左辺を  $A$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dI(A)}{dA} &= 2 \int_0^1 J_l(Ax) \frac{d}{dA} [J_l(Ax)] x dx = 2 \int_0^1 J_l(Ax) \left[ l \frac{J_l(Ax)}{Ax} - J_{l+1}(Ax) \right] x^2 dx \\ &= \frac{2l}{A} \int_0^1 J_l^2(Ax) x dx - 2 \int_0^1 J_l(Ax) J_{l+1}(Ax) x^2 dx \end{aligned}$$

故に

$$\int_0^1 J_l(Ax) J_{l+1}(Ax) x^2 dx = \frac{l}{A} I(A) - \frac{1}{2} \frac{dI(A)}{dA} \quad (\text{A 6.4})$$

の関係が成立する。一方 (A 6.3) の右辺の微分を実行し、漸化式等を用いて整理すれば

$$\frac{dI}{dA} = \frac{d}{dA} \frac{1}{2} [J_l^2(A) - J_{l-1}(A) J_{l+1}(A)] = \frac{J_{l-1}(A) J_{l+1}(A)}{A} \quad (\text{A 6.5})$$

の関係がえられる。従がつて (A 6.4) は (A 6.3) (A 6.5) を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{l}{A} \frac{1}{2} [J_l^2(A) - J_{l-1}(A) J_{l+1}(A)] &= \frac{J_{l-1}(A) J_{l+1}(A)}{2A} \\ &= \frac{1}{2A} [l J_l^2(A) - (l+1) J_{l-1}(A) J_{l+1}(A)] \end{aligned}$$

となつて (A 6.1) が証明された。又 (A 6.2) は (A 6.1) において  $A \rightarrow Ax$  とおき、積分変数を変えることによつて得られる。

附録 6.2 特性行列方程式 (6.48) の根の近似解

変形のある場合の特性行列方程式 (6.56) の根の近似計算は附録 5.1 と同様なやり方で求められる。

$$J_l(A)H_l(A) + (1-i)\varepsilon\alpha + (\mu - \mu') \{ H_l^2(A) + O(\alpha^2) \} = 0 \quad (\text{A 6.6})$$

において

$$J_l(A)H_l(A) \sim bx + ax^2$$

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{1}{2} (JH)''_{A=A_{lm}} = \frac{i}{\pi A_{lm}^2} + (J'H')_{A=A_{lm}} \\ &= \frac{i}{\pi A_{lm}^2} (1-2l) + J_{l+1}(A_{lm})N_{l+1}(A_{lm}) \quad (\text{A 6.7}) \end{aligned}$$

$$b \equiv (JH)'_{A=A_{lm}} = -\frac{2i}{\pi A_{lm}} \quad (\text{A 6.8})$$

$$x = A - A_{lm} \equiv A_{lm} \delta \quad (\text{A 6.9})$$

$$\begin{aligned} H_l^2(A) &\simeq -N_l^2(A_{lm}) + 2iN_l(A_{lm})J_l'(A_{lm})x \\ &= -N_l^2(A_{lm}) + 2bx \quad (\text{A 6.10}) \end{aligned}$$

又  $(\mu - \mu')$  の表式 (6.55) にあらわれる積分のうち  $I_{lk}$  は (6.59) の様にあらわに求められているが  $J_{lk}$  は  $A=A_{lm}$  において数値積分として求めるので、これらの  $x$  に関する 1 次の変化は小さいと仮定する。

$$(\mu - \mu')_A \simeq (\mu - \mu')_{A=A_{lm}} \quad (\text{A 6.11})$$

このようにおけば (A 6.6) は

$$ax^2 + b[1 + 2(\mu - \mu')]x + (1-i)\varepsilon\alpha - (\mu - \mu')N_l^2(A_{lm}) = 0$$

とかける。必要としている近似においてはこれ以上展開の精度をあげることは不必要である。

この式を

$$ax^2 + Bx + C = 0$$

の形において附録 5.1 と同様に  $C \rightarrow 0$  で  $x \rightarrow 0$  なる解を求めれば、

$$\begin{aligned} x &\simeq -\frac{C}{B} - \frac{aC^2}{B^3} = \\ &= -\frac{(1-i)\varepsilon\alpha - (\mu-\mu')N_l^2(A_{lm})}{b[1+2(\mu-\mu')]} - \frac{a[(1-i)\varepsilon\alpha - (\mu-\mu')N_l^2(A_{lm})]^2}{b^3[1+2(\mu-\mu')]^3} \end{aligned}$$

となる。上にのべた様に変形に関しては  $K^2 N^2 \alpha$  までの近似で解を求めているのであり、その項に比して  $K^2 N^2 \alpha^2$  は無視することにするから上式は

$$\begin{aligned} &\simeq -\frac{1}{b} [(1-i)\varepsilon\alpha - (\mu-\mu')N_l^2(A_{lm}) - 2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha] \\ &\quad - \frac{a}{b^3} [-2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha N_l^2(A_{lm})] \\ &= -\frac{1}{b} \{ (1-i)\varepsilon\alpha - (\mu-\mu')N_l^2(A_{lm}) - 2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha [1 + \frac{a}{b^2} N_l^2(A_{lm})] \} \\ &\hspace{15em} (A6.12) \end{aligned}$$

ここで (A6.7) (A6.8) を (A6.12) の最後の項の中に用いれば

$$\begin{aligned} 1 + \frac{a}{b^2} N_l^2(A_{lm}) &= 1 - \left(\frac{\pi A_{lm}}{2}\right)^2 \left[ \frac{i}{\pi A_{lm}^2} (1-2l) + J_{l+1}(A_{lm}) H_{l+1}(A_{lm}) \right] N_l^2(A_{lm}) \\ &= -i \left(\frac{\pi A_{lm}}{2}\right)^2 \left[ \frac{1}{\pi A_{lm}^2} (1-2l) + J_{l+1}(A_{lm}) N_{l+1}(A_{lm}) \right] N_l^2(A_{lm}) \\ &\hspace{15em} (A6.13) \end{aligned}$$

となる。ここで Lommel の関係式<sup>83)</sup> によつて

$$J_{l \pm 1}(A_{lm}) N_l^2(A_{lm}) = \left(\frac{2}{\pi A_{lm}}\right)^2 \hspace{15em} (A6.14)$$

が成立つことを利用した。従がつて (A 6.13) を (A 6.12) に代入し, (A 6.8) (A 6.9) を使えば

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{\pi}{2} \left\{ (1+i) \varepsilon \alpha - i(\mu - \mu') N_l^2(A_{lm}) \right. \\ & \left. - 2(\mu - \mu')(1-i) \varepsilon \alpha \left( \frac{\pi A_{lm}}{2} \right)^2 N_l^2(A_{lm}) \left[ \frac{1}{\pi A_{lm}^2} (1-2l) + J_{l+1}(A_{lm}) N_{l+1}(A_{lm}) \right] \right\} \end{aligned}$$

(A 6.15)

となる。但しこゝで  $\alpha$  の巾展開としての  $(\mu - \mu')$  には (6.55) を用いて  $K^2 N^2 \alpha$  までの項をとるものとする。

### 附録 6.3 $J_{lk}$ の積分値

(6.33) (6.34) で定義される積分  $J_{lk}(A)$  ( $k=l \pm 1$ ) を, 必要な  $A=A_{lm}$  の場合に数値積分を行つたものである。表には  $2 A_{lm}^2 J_{lk}(A_{lm})$  の値が示されている。

$k \backslash l$	0	1	2	3
0	$-0.17000 \cdot 10^{-1}$	$0.25817 \cdot 10^{-1}$ $-0.21610 \cdot 10^{-1}$	$0.46428 \cdot 10^{-1}$ $-0.22853 \cdot 10^{-1}$	$0.54576 \cdot 10^{-1}$ $-0.22902 \cdot 10^{-1}$
1	$-0.63485 \cdot 10^{-2}$	$0.14335 \cdot 10^{-1}$ $-0.20380 \cdot 10^{-1}$	$0.28186 \cdot 10^{-1}$ $-0.27640 \cdot 10^{-1}$	$0.37036 \cdot 10^{-1}$ $-0.31658 \cdot 10^{-1}$
2	$-0.39619 \cdot 10^{-2}$	$0.99237 \cdot 10^{-2}$ $-0.15386 \cdot 10^{-1}$	$0.20305 \cdot 10^{-1}$ $-0.22915 \cdot 10^{-1}$	$0.28113 \cdot 10^{-1}$ $-0.28947 \cdot 10^{-1}$
3	$-0.28875 \cdot 10^{-2}$	$0.75887 \cdot 10^{-2}$ $-0.12134 \cdot 10^{-1}$	$0.15998 \cdot 10^{-1}$ $-0.18968 \cdot 10^{-1}$	$0.22677 \cdot 10^{-1}$ $-0.24111 \cdot 10^{-1}$

(上段:  $k=l-1$ , 下段:  $k=l+1$ )



## 参 考 文 献

- 1) 池上, 小倉, 吉田 : Fabry Perot 共振器の空洞理論, 輻射科学研究会資料 (1964年5月)
- 2) H.Ogura, Y.Yoshida : Cavity Theory of Fabry Perot Resonator, Japan. J. Appl. Phys. 3 (1964) 546
- 3) 小倉, 吉田, 池上 : Fabry Perot 共振器の空洞理論, 昭39電気通信学会全国大会 Ⅲ 323
- 4) 池上, 小倉, 吉田 : 変形した Fabry Perot 共振器の理論, 輻射科学研究会資料 (1964年11月)
- 5) 池上, 小倉, 吉田 : Fabry Perot 共振器の空洞理論 (反射鏡に歪のある場合) 電気通信学会マイクロ波伝送研究会資料 (1964年12月)
- 6) H.Ogura, Y.Yoshida, J.Ikenoue : Theory of Deformed Fabry Perot Resonator, J. Phys. Soc. Japan 20 (1965) 598
- 7) 池上, 小倉, 吉田 : 変形した Fabry Perot 共振器の理論, 昭40電気四学会連合大会 Ⅲ 1521
- 8) 池上, 小倉, 吉田, 古浜 : 共焦点 Fabry Perot 共振器の微小変形, 輻射科学研究会資料 (1965年7月)
- 9) H.Ogura, Y.Yoshida, Y.Furubama, J.Ikenoue : Slight Deformation of Confocal Fabry Perot Resonator, Japan J. Appl. Phys 5 (1966) 225
- 10) 池上, 小倉, 吉田, 古浜 : 共焦点 Fabry Perot 共振器の微小変形, 電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料 (1965年12月)
- 11) 池上, 小倉, 吉田, 古浜 : 共焦点 Fabry Perot 共振器の微小変形 : 昭41 電気四学会連合大会 Ⅲ 1036
- 12) 池上, 小倉 : レーザ共振器の理論 : 日本物理学会誌 20 Ⅲ 11 (1965) 752
- 13) 池上, 小倉, 吉田, 淺本 : Fabry Perot 共振器の励振理論 - I, 輻射科学研究会資料 (1966年5月)

- 14) 池上, 小倉, 吉田, 設本 : Fabry Perot 共振器の励振理論, 電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料 (1966年7月)・  
池上, 小倉, 吉田 : Fabry Perot 共振器の励振理論 (2) -自由振動- 電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料 (1966年9月)・
- 15) A.L.Schawlow, C.H.Townes : Phys.Rev.112 (1958)1940
- 16) A.M.Prokhorov : JETP 34 (1958) 1658・
- 17) A.G.Fox, T.Li : Bell Syst.Tech.J.40 (1961) 453.
- 18) J.C.Slater : "Microwave Electronics" D.van Nostrand, New York (1950)・
- 19) H.Levine, J.Schwinger : Phys Rev. 73 (1948) 383.
- 20) P.M.Morse, H.Feshbach : "Method of Theoretical Physics" I,II. Mc Graw Hill, New York (1953)・
- 21) 林 : 電気通信学会誌 48 号4 アンテナ特集 (1965) 749.
- 22) C.Fabry, A.Perot : Ann Chim. Phys (7) 16 (1899) 115.
- 23) M.Born, E.Wolf : "Principles of Optics" 2nd Edition, Pergamon Press Oxford (1964)・
- 24) T.H.Maiman : Nature 187 (1960) 493.
- 25) R.J.Collins et al : Phys.Rev.Lett.5 (1960)303.
- 26) J.Kotik, M.C.Newstein : J.Appl.Phys.32 (1961) 178.
- 27) G.Goubau, F.Schwering : I.R.E.Trans AP-9 (1961) 248.
- 28) W.Culshaw : I.R.E.Trans MTT-10 (1962) 331.
- 29) S.R.Barone : J.Appl.Phys.34 (1963) 831
- 30) G.D.Boyd, J.P.Gordon : Bell Syst. Tech.J.40 (1961)489.
- 31) D.Slepian, H.O.Pollak : Bell Syst.Tech.J.40 (1961)43.
- 32) G.D.Boyd, H.Kogelnik : Bell Syst.Tech.J.41 (1962)1347.
- 33) C.C.Tang : Appl. Opt. 1 (1962) 763.
- 34) A.G.Fox, T.Li, S.P.Morgan : Appl. Opt. 2 (1963) 544.
- 35) S.P.Morgan : IEEE Trans. MTT-11 (1963) 191, MTT-12 (1964) 254.
- 36) J.A.Cochran : Bell.Syst.Tech.J.44 (1965) 77.

- 37) J.B.Beyer, E.H.Scheibe : I.R.E. Trans. AP-10 (1962)  
349.
- 38) L.Bergstein, H.Schachter : J.Opt.Soc. Amer. 54 (1964)  
887.
- 39) L.Bergstein, H.Schachter : J.Opt.Soc. Amer 55 (1965)  
1226.
- 40) L.Bergstein, E.Marom : J.Opt.Soc.Amer.56 (1966) 16.
- 41) W.Streifer, H.Gamo : "Qnasi-Optics", symposium pro-  
ceedings Vol.14 Polytechnic press (1964) p.357.
- 42) W.Streifer : J.Opt.Soc.Amer. 55 (1965) 868.
- 43) D.E.McCumber : Bell Syst.Tech. J.44 (1965) 333.
- 44) D.Slepian : Bell Syst.Tech.J.43 (1964) 3009.
- 45) T.Li : Bell Syst. Tech. J. 44 (1965) 917.
- 46) L.A.Vainshtein : Soviet Physics-JETP 17 (1963) 709.
- 47) H.Risken : Z.Phys. 180 (1964) 150.
- 48) V.A.Fock : ZhTE 15 (1945) 479.
- 49) L.A.Vainshtein : Soviet Physics-JETP 18 (1964)471.
- 50) L.A.Vainshtein : Soviet Physics-Technical Physics  
9 (1964) 157.
- 51) L.A.Vainshtein : Soviet Physics-Technical Physics  
9 (1964) 166.
- 52) A.G.Fox, T.Li : PIEEE 51 (1963) 80.
- 53) V.D.Gloge : Archiv der Elektrischen Übertragung 18  
(1964) 197, 20 (1965) 13.
- 54) T.Li : Bell Syst. Tech.J. 42 (1963) 2609.
- 55) 熊谷, 森, 塩沢 : 電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料(1964年11月)
- 56) 熊谷, 松原, 森 : 電気通信学会雑誌 47 (1964) 1003.
- 57) W.Dovle, M.B.White : J.Opt.Soc.Amer- 55 (1965) 1221.
- 58) L.A.Vainshtein : Soviet Physics-Technical Physics  
9 (1965) 1197.

- 59) B.G.King, E.H.Scheibe, I.Tatsuguchi : Proc. Natl  
Electronics Conf. Vol.11 (1955, Oct.) 949.
- 60) E.H.Scheibe : Proc. I.R.E. 40 (1961) 1079.
- 61) G.Koppelman : Z.Phys 173 (1963) 241.
- 62) R.W.Zimmerer : Rev. Sci.Instr. 33 (1962) 858.
- 63) R.W.Zimmerer : IEEE Trans. MTT-12 (1963) 371.
- 64) E.G.Neumann, U.Volle : Z.Angew. Phys.17 (1964)6304.
- 65) F.Westerman, W.Maier : Z.Phys.179 (1964) 244, 179  
(1964) 507.
- 66) J.W.Dees, A.P.Sheppard : IEEE Trans. IM-14 (1965)  
52.
- 67) G.Koppelman : Z.Phys. 188 (1965) 220.
- 68) P.F.Checcacci, A.M.Scheggi : Appl. Opt. 4 (1965)1529.
- 69) W.Culshaw : IRE Trans. MTT-7 (1959) 221.
- 70) W.Culshaw : IRE Trans. MTT-8 (1960) 182.
- 71) W.Culshaw : IRE Trans. MTT-9 (1961) 135.
- 72) H.Welling : H.G.Andressen : IEEE Trans. MTT-12  
(1964) 249.
- 73) D.E.T.F.Ashby, D.F.Jephcott : Appl. Phys. Lett. 3  
(1963) 13.
- 74) J.B.Gerardo, J.T.Verdeyen : Proc. IEEE 52 (1963)  
690.
- 75) D.H.Auston, R.I.Primich, R.A.Hayami : "Quasi-Optics"  
symposium Proceedings Vol.14 Polytechnic press  
(1964) 273.
- 76) R.I.Primich, R.A.Hayami : IEEE Trans MTT-12 (1964)  
33.
- 77) K.E.Lonngren, J.M.Mink, J.B.Beyer : IEEE Trans.  
MTT-12 (1964) 548.
- 78) G.N.Watson : "Theory of Bessel Functions" Cambridge.

Univ. Press (1945).

- 79) 例えば L.Pauling, E.B.Wilson : "Introduction to Quantum Mechanics" McGraw Hill, New York (1935).
- 80) S.P.Morgan : J.Appl. Phys. 21 (1950) 329.
- 81) S.O.Rice : Reflection of Electromagnetic Waves from Slightly Rough Surfaces, "Electromagnetic Waves" Interscience Publishers (1950)
- 82) A.Sommerfeld : "Partial Differential Equations in Physics" Academic Press, New York (1949) § 27.
- 83) 数学公式 Ⅱ , 岩波書店 (1960).
- 84) B.Noble : "Method Based on the Wiener-Hopf Technique" Pergamon Press, London (1958).
- 85) H.Levine, J.Schwinger : Phys. Rev. 74 (1948) 958.
- 86) 数学公式 I, 岩波書店 (1953).

# 主 要 記 号 表

記 号	説 明	定 義 箇 所
$a$	反射鏡半径	図 2.1, 図 4.2
$a_{nl}^{\pm}, a_n$	開口面境界値 $\partial\varphi/\partial n$ の Fourier 展開係数	(4.16)
$A_{\nu}$	空洞内部の場の固有函数による展開係数	(2.7)
$\alpha$	Fresnel 数の平方根の逆数に比例するパラメタ	(2.55), (4.38)
$b_{nl}^{\pm}, b_n$	開口面境界値 $\varphi$ の Fourier 展開係数	(4.15)
$c(t)$	一種の Fresnel 積分	(4.40)
$D_{kk'}$	傾斜変形における積分	(6.21)
$\delta$	特性方程式の根における微小パラメタ	(5.14)
$\delta_d$	共振器の 1 トランジット当りの回折損失	(2.20), (5.18)
$\delta(X-X')$	Dirac の $\delta$ 函数	(2.10)
$\Delta$	傾斜変形における特性行列式	(6.44)
$\Delta k, \Delta l$	行列式	(6.46)
$\Delta k k'$	傾斜変形における積分	(6.28)
$\epsilon_l$	1 又は 2 の数値	(A 2.8), (4.13)
$\varphi$	傾斜変形の最大傾斜線の方角を示す角度	(3.21), (6.20)
$\varphi(X)$	波動函数	(4.1)
$\varphi_i(X), \varphi_e(X)$	内部又は外部の波動函数	(4.5) 又は (4.7)
$G(X X')$	一般の Green 函数	(2.10)
	平行平面導波管の Green 函数	(4.4), (4.11)
$H(X X')$	自由空間の Green 函数	(4.7), (4.14)
$H_l^{(1)}, H_l$	第 1 種 Hankel 函数	(2.32)
$H_{\mu\nu}$	変形による振動行列	(3.7)
$I_{\mu\nu}$	開口面の輻射による振動行列	(3.12), (3.19)
$I_{kk'}(A)$	Bessel 函数の積分	(6.24), (6.25)
$I_{nn'}(K)$	モード変換行列の積分にあらわれる函数	(4.22), (4.33)
$I_o, I_1$	表面積分	(2.43), (2.44)

$I_o', I_1'$	表面積分	(2.45), (2.53)
$I_o'', I_1''$	表面積分	(2.54)
$I_l(A)$	変形 Bessel 函数	(2.52)
$J_l, J_\nu$	Bessel 函数	(2.22)
$J_{oo}$	変形空洞の固有函数による開口面の輻射擾動	
	行列の対角要素	(3.11)
$J_{lk}(A)$	Bessel 函数の2重積分	(6.32)
$k$	Green 函数の積分変数	(2.22)
$K$	変形パラメタ : 傾斜変形	(3.24), (6.20)
	: 球面変形	(3.28)
$K$	積分変数	(2.46), (4.20)
$K_l(A)$	変形 Bessel 函数	(2.52)
$K_{nn}^l, K_{nn}$	モード変換行列要素	(4.20), (4.34)
$L$	共振器軸長	図2.1, 図4.2
$l$	主として添字, 角変数 $\theta$ に関する量子数	(2.21)
$\lambda$	自由空間波長	(2.20)
	Green 函数の積分変数	(2.22)
$L_{nn}^l, L_{nn}$	モード変換行列要素	(4.20), (4.35)
$A, A(K)$	積分変数, 積分変数変換	(2.46), (4.21)
$A_n$	モードに対応する Bessel 函数の一つの変数	(4.12)
$A_{lm}$	Bessel 函数の根	(2.38)(2.39)(5.13)
$m$	主として添字, Bessel 函数の根の番号	(2.38), (2.39)(5.13)
$M_{nn}^l, M_{nn}$	モード変換行列要素	(4.20), (4.36)
$\mu, \mu'$	傾斜変形による項	(6.49)
$\mu$	$\nu$ と共に添字として, 固有値を指定する量子数の組	(2.2)
$n, n_o$	空洞固有函数又は導波管モードのz方向量子数, $n_o$ は 特定の $n$	(2.37)(4.11)(5.3)
$n$	外向き法線	(2.4), 図3.1, 図4.2
$N$	Fresnel 数	(2.48), (4.18)
$N_\nu$	空洞固有函数の規格化因子	(2.38), (2.39)

$N_l(A)$	Neuman 函数	(6.54)
$N_{nn}^l, N_{nn}'$	モード変換行列要素	(4.20), (4.37)
$\nu$	$\mu$ と共に添字として, 固有値を指定する量子数の組	(2. 2)
$P$	励振入力	(4.28)
$\psi_k, \psi_l$	変形による等価励振強度	(6.14), (6.15)
$\psi_{nl}^{\pm}$	励振強度	(4.19)
$Q$	共振器の $Q$	(2.19)
$r$	円筒座標変数	
$S, S'$	開口面, 又は境界条件の型	図 2.1, (2.3)(2.4)
$s(t)$	一種の Fresnel 積分	(4.39)
$\sigma, \sigma_0$	鏡面, 又は変形鏡面	図 2.1, 図 3.1
$\theta$	円筒座標変数	
$\theta_{kk}'$	傾斜変形における積分の角部分	(3.22), (6.23)
$u, u_\nu$	空洞内の波動函数および固有函数	(2.11), (2. 2)
$u_{nl}^{\pm}$	一つの導波管モードの定在波	(6. 4)
$U_n$	変形空洞の一つの固有函数	(3. 9)
$V$	共振器内部の領域	図 2.1
$z$	円筒座標変数	
$\omega$	角周波数	(2.16), (4.1)
$\omega_\nu$	空洞の固有角周波数	(2. 2), (2.40)
$\Delta\omega_\nu, \Delta\omega$	共振周波数の閉空洞固有周波数からのずれ	(2.18), (2.61)
$\Delta\omega$	共振周波数の完全平面波共振周波数からのずれ	(5.17)
$+, -$	回転縮退モード $\cos l\theta, \sin l\theta$ に対応する量子数	(2.37), (4.15)(4.16)



